O TEOREMĂ DE MEDIE PENTRU FUNCȚII CONVEXE ȘI UNELE CONSECINȚE

Dan Ștefan Marinescu[1)] și Mihai Monea[2)]

Abstract. The purpose of this article is to present a mean theorem for convex functions, a converse of this result and some consequences.

Keywords: mean theorem, convex function, monotonic functions, lateral derivatives.

MSC : 26A51

1. Introducere

Unul dintre cele mai importante rezultate din analiza matematică este teorema de medie a lui Lagrange, care spune că, pentru orice funcție derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ și orice $a, b \in I, a < b$, există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \tag{1}$$

unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval oarecare. Rezultatul, cunoscut și sub numele de teorema creșterilor finite, are foarte multe consecințe, motiv pentru care a fost analizat din mai multe perspective, cum ar fi găsirea altor demonstrații, sau construcția unor reciproce, extinderi sau generalizări ale relației (1). O contribuție notabilă pe această temă a avut Karamata [2] care a demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 1.1. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și care admite derivate laterale finite în orice punct din I. Atunci, pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, există un punct $c \in (a, b)$ și un număr $t \in [0, 1]$ astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = t f'_{+}(c) + (1 - t) f'_{-}(c), \tag{2}$$

---

1) Profesor, Hunedoara.

2) Profesor, Colegiul Natțional „Decebal, Deva.

unde $f'_+(c)$ *și* $f'_-(c)$ *reprezintă derivatele laterale la dreapta, respectiv la stânga, ale funcției* f *în punctul* c.

În cele ce urmează dorim să analizăm o categorie importantă de funcții care corespund ipotezelor Teoremei 1.1, respectiv clasa funcțiilor convexe. Paragrafele următoare vor conține o serie de rezultate cunoscute sau mai puțin cunoscute legate de acest subiect. Vom adapta Teorema 1.1 pentru funcții convexe, vom prezenta rezultate reciproce, precum și unele aplicații în calculul integral.

2. O teoremă de medie și reciproca sa

Pe parcursul acestui articol vom nota cu I un interval nevid și deschis din $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1. *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcție convexă. Atunci, pentru orice* $a, b \in I$, $a < b$, *există un punct* $c \in (a, b)$ *și un număr* $t \in [0, 1]$ *astfel încât are loc* (2).

Demonstrație. Funcția f, fiind convexă, este și continuă pe I (vezi Teorema A, pag. 4 din [4]) și admite derivate laterale finite în orice punct din I (vezi Teorema B, pag. 5 din [4]). Atunci f satisface ipotezele Teoremei 1.1 și concluzia se impune apoi.

Teorema următoare poate fi considerată o reciprocă a rezultatului anterior.

Teorema 2.2. *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcție strict convexă. Atunci, pentru orice* $c \in I$ *și orice număr* $t \in [0, 1]$, *există* $a, b \in I$, *astfel încât* $a < c < b$ *și are loc* (2).

Demonstrație. Deoarece I este interval deschis, există $u, v \in I$ astfel încât $u < c < v$ și $[u, v] \subset I$. Notăm $M = tf'_+(c) + (1 - t) f'_-(c)$ și considerăm funcția continuă

$$g : [u, v] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - Mx.$$

Dacă $g(u) = g(v)$ obținem $f(u) - Mu = f(v) - Mv$, ceea ce este echivalent cu concluzia.

În continuare presupunem $f(u) < f(v)$, cazul celălalt fiind analog.

Vom demonstra că această funcție este strict descrescătoare pe $[u, c]$ și strict crescătoare pe $[c, v]$. Fie $\alpha, \beta \in [u, c]$ cu $\alpha < \beta$. Atunci

$$g(\beta) - g(\alpha) = (f(\beta) - f(\alpha)) - M(\beta - \alpha). \tag{3}$$

Din Teorema 2.1 există $d \in (\alpha, \beta)$ și $s \in [0, 1]$ astfel încât $f(\beta) - f(\alpha) = \left(sf'_+(d) + (1 - s) f'_-(d)\right)(\beta - \alpha)$. Folosind (3) și monotonia derivatelor laterale ale unei funcții convexe (vezi Teorema B, pag. 5 din [4]) obținem

$$\begin{aligned} g(\beta) - g(\alpha) &= (\beta - \alpha)\left(sf'_+(d) + (1 - s) f'_-(d) - tf'_+(c) - (1 - t) f'_-(c)\right) \\ &\leqslant (\beta - \alpha)\left(sf'_+(d) + (1 - s) f'_+(d) - tf'_-(c) - (1 - t) f'_-(c)\right) \\ &= (\beta - \alpha)\left(f'_+(d) - f'_-(c)\right) < 0, \end{aligned}$$

deci g este strict descrescătoare pe $[u, c]$. Analog studiem monotonia pe $[c, v]$. Deducem că $f(c) \leqslant f(u)$ și $f(c) \leqslant f(v)$. Atunci există $w \in (c, v)$ astfel încât

$g(u) = g(w)$, adică $f(u) - Mu = f(w) - Mw$, ceea ceste din nou echivalent cu concluzia şi încheie demonstraţia. $\square$

Condiţia ca f să fie strict convexă este fundamentală în Teorema 2.2., în absenţa ei teorema nemaifiind valabilă. Într-adevăr, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x$ pentru $x < 0$ şi $f(x) = 2x$ pentru $x \geqslant 0$ este convexă. Alegând punctul $c = 0$ şi numărul $t = 1$ obţinem $M = tf'_+(c) + (1-t) f'_-(c) = 2$. Pe de altă parte, pentru orice $a < 0$ şi $b > 0$ avem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{2b-a}{b-a} = 1 + \frac{b}{b-a} < 2,$$

deci relaţia (2) nu mai poate fi îndeplinită.

Încheiem acest paragraf cu observaţia că, dacă funcţia f este concavă, atunci $-f$ este convexă şi rezultatele din teoremele precedente rămân, de asemenea, valabile.

3. Aplicaţii în calculul integral

Legătura dintre funcţiile convexe şi calculul integral este dată de rezultatul care spune că o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă dacă şi numai dacă există un punct $a \in I$ şi o funcţie crescătoare $g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s,$$

pentru orice $x \in I$ (vezi Teorema A, pag. 10 din [4]). În mod suplimentar, pentru orice $x \in I$ avem şi $f'_-(x) = g(x-0)$ şi $f'_+(x) = g(x+0)$, unde $g(x-0)$ şi $g(x+0)$ reprezinta limita laterală la stânga, respectiv la dreapta a funcţiei g în punctul x. De asemenea, dacă f este convexă atunci avem şi

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'_-(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^x f'_+(s)\,\mathrm{d}s.4.$$

Cu aceste considerente vom prezenta rezultatele acestui paragraf.

Corolarul 3.1. *Fie $g : I \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Atunci, pentru orice $a, b \in I, a < b$, există un punct $c \in (a, b)$ şi un număr $t \in [0, 1]$ astfel încât*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b g(s)\,\mathrm{d}s = tg(c-0) + (1-t)\,g(c+0). \tag{4}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s$. Această funcţie este convexă şi avem $f(a) = 0$. Teorema 2.1 ne asigură că există $c \in (a, b)$ şi $t \in [0, 1]$ astfel încât $\frac{f(b)}{b-a} = tf'_+(c) + (1-t) f'_-(c)$. Concluzia se obţine acum ţinând cont de consideraţiile de la începutul acestui paragraf. $\square$

Corolarul 3.2. *Fie $g : I \to \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare. Atunci, pentru orice punct $c \in I$ şi număr $t \in [0, 1]$, există $a, b \in I, a < c < b$, astfel încât are loc* (4).

Demonstraţie. Fie u un punct oarecare din I. Considerăm funcţia strict convexă $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_u^x g(s)\,\mathrm{d}s$. Conform Teoremei 2.2 există $a, b \in I$

cu $a < c < b$ astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tf'_+(c) + (1-t)\, f'_-(c)$. Concluzia se obține ținând cont de de considerațiile făcute la începutul paragrafului și de relația $f(b) - f(a) = \int_a^b g(s)\, \mathrm{d}s$. □

Să observăm că, dacă o funcție $g : I \to \mathbb{R}$ este (strict) descrescătoare, atunci $-g$ este (strict) crescătoare. Aplicând rezultatele anterioare pentru funcția $-g$ obținem validitatea Corolarelor 3.1 și 3.2 și pentru funcții (strict) descrescătoare.

O altă consecință imediată o reprezintă și problema propusă la etapa județeană a Olimpiadei Naționale de Matematică din 2022, al cărei autor este T. Trif (vezi [5]).

Corolarul 3.3. *Fie $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție strict monotonă. Demonstrați că, pentru orice $c \in I$, există $a, b \in I$ astfel încât $c \in (a, b)$ și*

$$\int_a^b g(s)\mathrm{d}s = g(c)(b-a).$$

Demonstrație. Putem presupune că g este strict crescătoare. Atunci, pentru orice $c \in I$, avem $g(c-0) \leqslant g(c) \leqslant g(c+0)$, deci există $t \in [0.1]$ astfel încât

$$g(c) = tg(c-0) + (1-t)\, g(c+0)$$

și concluzia se obține ca o consecință a Corolarului 3.2. □

Continuăm cu o prelucrare pentru funcții convexe a Teoremei 3 din [1].

Propoziția 3.4. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție convexă. Atunci, pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, există un punct $c \in (a, b)$ și un număr $t \in [0, 1]$ astfel încât are loc relația*

$$\int_a^b f(s)\, \mathrm{d}s = (b-a)\, f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \left(tf'_+(c) + (1-t)\, f'_-(c)\right)$$

Demonstrație. Notăm $K = \int_a^b f(s)\, \mathrm{d}s - (b-a)\, f(a)$ și considerăm funcția $g : I \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = -\int_x^b f(s)\, \mathrm{d}s + (b-x)\, f(x) + \frac{K(b-x)^2}{(b-a)^2},$$

pentru orice $x \in I$. Această funcție este continuă, verifică egalitatea $g(b) = g(a) = 0$ și admite derivate laterale finite în orice punct din I. În plus

$$g'_+(x) = f(x) + (b-x)'\, f(x) + (b-x)\, f'_+(x) + \left(\frac{K(b-x)^2}{(b-a)^2}\right)' =$$

$$= f(x) - f(x) + (b-x)\, f'_+(x) - \frac{2K(b-x)}{(b-a)^2} = (b-x)\left(f'_+(x) - \frac{2K}{(b-a)^2}\right),$$

respectiv $g'_-(x) = (b-x)\left(f'_-(x) - \frac{2K}{(b-a)^2}\right)$, pentu orice $x \in I$. Teorema 1.1 ne asigură că există un punct $c \in (a, b)$ și un număr $t \in [0, 1]$ astfel încât $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = tg'_+(c) + (1-t)\, g'_-(c)$, de unde obținem $tg'_+(c) + (1-t)\, g'_-(c) = 0$. În continuare

$$t\left(b-c\right)\left(f_{+}'\left(c\right)-\frac{2K}{\left(b-a\right)^{2}}\right)+\left(1-t\right)\left(b-c\right)\left(f_{-}'\left(x\right)-\frac{2K}{\left(b-a\right)^{2}}\right)=0,$$

de unde

$$\left(b-c\right)\left(tf_{+}'\left(x\right)+\left(1-t\right)f_{-}'\left(x\right)-\frac{2K}{\left(b-a\right)^{2}}\right)=0.$$

Cum $b>c$, obţinem $K=\frac{(b-a)^2}{2}\left(tf_{+}'\left(x\right)+\left(1-t\right)f_{-}'\left(x\right)\right)$, ceea ce este echivalent cu cerinţa din enunţ. □

Încheiem acest articol cu o versiune pentru funcţii convexe a unuia dintre cele mai importante rezultate din analiza matematică, apărut prima dată în ediţia I a lucrării [3] (vezi Problema 10, pag. 49).

Propoziţia 3.5. Fie J un interval deschis astfel încât $[0,1]\subset J$ şi $f:J\to\mathbb{R}$ o funcţie convexă. Definim şirul $(y_n)_{n\geqslant 1}$ prin $y_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$, pentru orice $n\geqslant 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}n\left(y_n-\int_0^1 f\left(s\right)\mathrm{d}s\right)=\frac{f\left(1\right)-f\left(0\right)}{2}.$$

Demonstraţie. Fie $k\in\{1,2,3,...,n\}$. Conform Propoziţiei 3.4 există $c_k\in\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)$ şi $t_k\in[0,1]$ astfel încât

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f\left(s\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}\left(t_kf_{+}'\left(c_k\right)+\left(1-t_k\right)f_{-}'\left(c_k\right)\right).$$

În continuare avem

$$n\left(y_n-\int_0^1 f\left(s\right)\mathrm{d}s\right)=n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f\left(s\right)\mathrm{d}s\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(t_kf_{+}'\left(c_k\right)+\left(1-t_k\right)f_{-}'\left(c_k\right)\right)$$

$$=f\left(1\right)-f\left(0\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(t_kf_{+}'\left(c_k\right)+\left(1-t_k\right)f_{-}'\left(c_k\right)\right).$$

Deoarece, pentru orice $x\in J$, avem $f_{-}'\left(x\right)\leqslant f_{+}'\left(x\right)$, suntem conduşi la inegalitatea

$$\begin{aligned}f\left(1\right)-f\left(0\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f_{+}'\left(c_k\right)&\leqslant n\left(y_n-\int_0^1 f\left(s\right)\mathrm{d}s\right)\\&\leqslant f\left(1\right)-f\left(0\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f_{-}'\left(c_k\right)\end{aligned}.\tag{5}$$

Funcţia $h:J\to\mathbb{R}$, $h\left(x\right)=f_{-}'\left(x\right)$ este crescătoare, deci integrabilă. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}f_{-}'\left(c_k\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 f_{-}'\left(s\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\left(f\left(1\right)-f\left(0\right)\right)$. În mod analog

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} f'_+ (c_k) = \tfrac{1}{2} (f (1) - f (0)) .$$

În aceste condiții relația (5) și criteriul cleștelui ne conduc la concluzie. $\square$

Bibliografie

[1] D.B. Goodner, *Mean Values Theorems for Functions with Finite Derivates*, Amer. Math. Monthly, **67** (1960), 852-855.

[2] J. Karamata, *Sur la formule des accroissements finnis*, Srpska Akad. Nauka. Zbornik Radova, Mat. Inst., **1** (1951), 119-124.

[3] G. Pólya, G. Szegő, *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer, 1978.

[4] A.W. Roberts, D.E. Varberg, *Convex Functions*, Academic Press, New York, 1973.

[5] ***, *Romanian Mathematical Competition 2022 - RMC 2023*, SSMR.