

Subiectul I (30 puncte)

1. Determinați partea imaginară a numărului $(1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.
2. Demonstrați că dreapta de ecuație $y = 2x - 1$ nu intersectează parabola de ecuație $y = x^2 + x + 1$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$.
4. Determinați probabilitatea ca, alegând o mulțime de trei cifre din mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, toate cifrele alese să fie pare.
5. Calculați lungimea înălțimii duse din B în triunghiul ABC , știind că $A(0, 9)$, $B(2, -1)$ și $C(5, -3)$.
6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 3$, $BC = 5$ și $AC = 7$. Calculați lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC .

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 7x - y + az = b \end{cases}$$
, unde a și b sunt parametri reali, iar

$A \in M_3(\mathbb{R})$ este matricea sistemului.

- a) Determinați $a \in \mathbb{R}$, pentru care determinantul matricei sistemului este egal cu zero.
 - b) Determinați valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.
 - c) Arătați că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului, atunci $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \geq \frac{2}{7}$.
2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.
- a) Calculați $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.
 - b) Arătați că polinomul f nu are nicio rădăcină întregă.
 - c) Calculați $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$.

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
 - a) Calculați $f'(x)$.
 - b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
 - c) Demonstrați că, pentru orice număr real $m > 0$, ecuația $f(x) = m$ are o soluție reală unică.
2. Fie funcțiile $F, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
 - a) Demonstrați că funcția F este strict crescătoare.
 - b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot F(x)dx$.
 - c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$.