O DEMONSTRAȚIE A INEGALITĂȚII MEDIILOR FĂRĂ INDUCȚIE

Andrei Vernescu[1)]

Abstract. We give a proof of the AM-GM inequality without using the mathematical induction.

Keywords: Arithmetic and geometric means, the AM-GM inequality, the inequality of Bernoulli.

MSC : 26D05

1. Introducere

Considerăm binecunoscuta inegalitate a mediilor, a lui Cauchy

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

în care $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale pozitive, cu egalitate dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. (Ea este adesea desemnată în ziua de astăzi în literatura matematică prin termenul de „AM-GM inequality".) Sunt cunoscute numeroase demonstrații ale inegalității, existând chiar și manuale și monografii special dedicate acestei tematici – a se vedea [2].

Pe de altă parte, a devenit aproape un loc comun afirmația că în toate demonstrațiile elementare ale inegalității mediilor se utilizează, sub o formă sau alta, inducția matematică.

Vom arăta însă că se poate obține și o demonstrație fără a se utiliza inducția. În acest scop, vom avea în vedere o formă mai restrânsă a inegalității lui Bernoulli, care se poate stabili fără a folosi inducția iar apoi, făcând o mică adaptare la o elegantă demonstrație a lui V. Arsinte [1], destul de puțin cunoscută (de exemplu, nemenționată în [2]), regăsită și de L. Maligranda [4], vom obține rezultatul anunțat.

[1)]Conf. univ. dr., Universitatea „Valahia", Târgoviște, avernescu@gmail.com

2. Două elemente pregătitoare

a) Inegalitatea lui Bernoulli pe domeniul maxim de existență,

$$(1+a)^n \geqslant 1+na, \quad \forall\, a \geqslant -1,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{B$_1$}$$

(cu egalitate numai în cazurile $a = 0$ sau $n = 0$ sau $n = 1$) necesită pentru demonstrare utilizarea inducției matematice, constituind, de altfel, un exercițiu extrem de simplu referitor la această metodă.

Considerând inegalitatea pe un domeniu mai restrâns, anume, pentru $a \geqslant 0$, adică

$$(1+a)^n \geqslant 1+na, \quad \forall\, a \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{B$_2$}$$

demonstrația inegalității (B$_1$) se transferă automat prin ereditate și pentru (B$_2$), deoarece $(0,\infty) \subset (-1,\infty)$. De asemenea, o demonstrație pentru (B$_2$) este posibilă și pe baza dezvoltării expresiei $(1+a)^n$ cu ajutorul formulei binomului lui Newton, urmată de o minorare evidentă ([3]), dar astfel apare din nou inducția, „mascată“ prin intermediul formulei binomului.

Însă, cum anunțasem în introducere, se poate da o demonstrație simplă fără inducție a inegalității (B$_2$). Într-adevăr, inegalitatea este echivalentă cu

$$(1+a)^n - 1 - na, \forall a \geqslant 0.$$

Aplicând formula

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}\right),$$

demonstrabilă direct, fără inducție și dând factor comun pe a, obținem, pentru $n > 1$,

$$\begin{aligned}(1+a)^n - 1 - na &= [(1+a)^n - 1^n] - na \\ &= [(1+a)-1][(1+a)^{n-1} + (1+a)^{n-2} + \ldots + (1+a) + \\ &\qquad + 1] - na \\ &= a[(1+a)^{n-1} + (1+a)^{n-2} + \ldots + (1+a) - (n-1)] \geqslant 0\end{aligned}$$

deoarece toți cei $n-1$ termeni de forma $(1+a)^k$ sunt supraunitari și inegalitatea (B$_2$) este demonstrată. □

Mai menționăm o demonstrație scurtă a inegalității (B$_1$) dată de C. Mortici, [5]. Notând $x = \frac{1}{p}$, cu $p > 0$, avem

$$(1+x)^n = \left(1+\frac{1}{p}\right)^n > \left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{p+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p+n-1}\right) >$$

$$> \frac{p+1}{p}\cdot\frac{p+2}{p+1}\cdots\frac{p+n}{p+n-1} = \frac{p+n}{p} = 1 + n\cdot\frac{1}{p} = 1+nx.$$

b) Pentru efectuarea demonstrației pe care o avem în vedere, a inegalității mediilor, reamintim foarte pe scurt, ca punct de plecare, demonstrația menționată, anume sub forma dată de V. Arsinte în [1].

Pentru cele n numere reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, în afară de notațiile uzuale

$$A = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n},$$

să mai notăm

$$m_1 = a_1, m_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, m_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A.$$

Întrucât $\frac{m_k}{m_{k-1}} > 0$ ($k = 2, 3, 4, \ldots, n$), avem $\frac{m_k}{m_{k-1}} - 1 > -1$, așadar, inegalitatea (B$_1$) este aplicabilă pentru $a = \frac{m_k}{m_{k-1}} - 1$, ($k = 2, 3, 4, \ldots, n$). Obținem

$$\left(\frac{m_k}{m_{k-1}}\right)^k \geqslant 1 + k\left(\frac{m_k}{m_{k-1}} - 1\right), \forall\, a > -1, \forall\, k \in \mathbb{N},\, k \geqslant 2.$$

După câteva calcule elementare în care nu se mai efectuează nicio minorare, se găsește

$$m_k^k \geqslant m_{k-1}^{k-1} \cdot a_k.$$

În continuare, avem

$$\begin{array}{l} k = 2 \Rightarrow m_2^2 \geqslant m_1^1 \cdot a_2 \\ k = 3 \Rightarrow m_3^3 \geqslant m_2^2 \cdot a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k = n \Rightarrow m_n^n \geqslant m_{n-1}^{n-1} \cdot a_n, \end{array}$$

de unde, înmulțind membru cu membru toate inegalitățile, rezultă $m_n^n \geqslant m_1 a_2 \cdots a_n$, adică $m_n^n \geqslant a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ sau încă $A^n \geqslant G^n$, de unde, deoarece $A > 0$, $G > 0$, rezultă $A \geqslant G$.

3. Demonstrația

În demonstrația menționată, numerele $a = \frac{m_k}{m_{k-1}} - 1$ sunt, toate, strict mai mari decât -1, dar nu cu necesitate pozitive, deci inegalitatea utilizată trebuia să fie (B$_1$), a cărei demonstrație se bazează pe inducție, și nu (B$_2$).

Putem acum aranja ca toate numerele $a = \frac{m_k}{m_{k-1}} - 1$ să fie strict pozitive, așa încât întreaga demonstrație să se bazeze pe utilizarea inegalității (B$_2$) în loc de (B$_1$), deci să nu apeleze sub nicio formă la inducția matematică.

În acest scop, este suficient să ordonăm crescător numerele, deci, după o eventuală renumerotare, să avem $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$.

În acest caz, după cum este binecunoscut, șirul mediilor aritmetice este de asemenea crescător, adică

$$m_{k-1} \leqslant m_k, \quad k = 2, 3, \ldots, n$$

(după cum se poate verifica imediat printr-un calcul simplu). Acum toate numerele a sunt strict pozitive, deci urmând exact același raționament cu cel prezentat, însă după „complicația” de ordonare pe care am introdus-o, dar aplicând inegalitatea (B_2), se obține o demonstrație a inegalității mediilor care nu utilizează inducția matematică.

4. Comentarii finale

Afirmația reciprocă, adică aceea că inegalitatea mediilor implică inegalitatea lui Bernoulli, cu $a > 0$, este și ea valabilă și se demonstrează ușor. Într-adevăr, luând în inegalitatea mediilor $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1$ și $a_n = 1 + na$, se obține

$$\frac{(n-1)+(1+na)}{n} \geqslant \sqrt[n]{1+na},$$

care, după câteva calcule elementare, dă exact inegalitatea lui Bernoulli (B_2).

Pentru echivalența dintre inegalitatea AM-GM și alte inegalități clasice, se pot consulta, printre altele, [4] și [6].

BIBLIOGRAFIE

[1] V. Arsinte, *Inegalitatea lui Bernoulli implică inegalitatea mediilor*, G. M. 10/1989, coperta 3.

[2] P.S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London, 2003.

[3] N. Dinculeanu, E. Radu, *Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a XI-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, diferite ediții 1959-1979.

[4] L. Maligranda, *The AM-GM Inequality is equivalent to the Bernoulli Inequality*, Math. Intelligencer, 34, no.1 (2012), 1-2.

[5] C. Mortici, *A Very Elementary proof of Bernoulli's Inequality*, The College Math. Journal, Vol. 46, No.2 (March 2015), 136-137.

[6] A. Vernescu, *Numărul e și matematica exponențialei*, Editura Universității din București, 2004.