

Clasa a IX-a

13. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătați că ecuația $b^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + c^2 = 0$ nu are rădăcini reale.

14. Fie familia de funcții $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Arătați că vârfurile parabolilor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta de ecuație $y = x + 1$, mai puțin punctul $A(-1; 0)$.

b) Arătați că toate aceste parabole trec printr-un punct fix.

c) Găsiți o relație independentă de m între rădăcinile ecuației $f_m(x) = 0$.

15. Câte soluții reale are ecuația $\sin x = x^2 + x + 1$?

16. Arătați că:

a) numărul $\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$ este rațional;

b) valoarea expresiei $\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ nu depinde de $x \in \mathbb{R}$;

c) ecuația $\sin(\sin x) = 1$ nu are soluții reale.

17. a) Arătați că în orice triunghi ABC are loc relația $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

b) Calculați $\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B}$, dacă ABC este un triunghi ascuțitunghic.

18. Arătați că $\left| \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} \right| \leq \sqrt{x + \frac{1}{x}}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$ pentru care $\sin x + \cos x \neq 0$.

Clasa a X-a

19. În plan se consideră o mulțime A care conține n puncte.

a) Determinați numărul maxim de drepte care trec prin cel puțin două puncte din A .

b) Determinați numărul maxim de triunghiuri cu vârfurile în mulțimea A .

20. În plan se consideră n puncte, dintre care k sunt colimiare pe o dreaptă d , iar $n - k$ nesituate pe d .

a) Determinați numărul maxim de drepte care trec prin două din cele n puncte.

b) Determinați numărul maxim de triunghiuri care au vârfurile în trei dintre cele n puncte.

21. a) Determinați numărul diagonalelor unui poligon convex cu n vârfuri.

b) Determinați numărul maxim al punctelor de intersecție a diagonalelor unui poligon convex cu n vârfuri.

22. Trasăm toate diagonalele unui poligon convex cu n vârfuri. Presupunem că oricare trei diagonale nu sunt concurente.

a) În câte părți este împărțit poligonul ?

b) Aflați numărul triunghiurilor diferite care se formează.

23. Demonstrați că numărul $\frac{60!}{(20!)^3}$ este natural.

24. Determinați numărul soluțiilor sistemului $x! < 7, \quad y! < 25$, unde x și y sunt numere naturale.