

Abstract. This note solves a 20-year old problem from this magazine, whose solution was never published

Keywords: coloring, triangle, orthocentre

MSC : 05A18

În cele ce urmează vom rezolva o problemă propusă de către Marius Ghergu, publicată în Gazeta Matematică nr. 1/2004 și reluată în Gazeta Matematică nr. 7-8/2004. Problema nu a fost rezolvată în Gazetă decât parțial. Partea rămasă nerezolvată are următorul enunț.

Fiecare punct al unui plan se colorează cu una dintre culorile roșu sau verde, existând cel puțin un punct din fiecare culoare. Arătați că există un triunghi ale cărui vârfuri au altă culoare decât cea a ortocentrului său.

Pentru a demonstra afirmația precedentă începem cu următoarea observație.

Propoziție. Fie ABC un triunghi și H ortocentrul său. Dacă trei dintre punctele A, B, C, H sunt de o culoare și al patrulea de altă culoare, atunci cerința din enunțul problemei este îndeplinită.

Demonstrația este imediată, deoarece fiecare dintre punctele A, B, C, H este ortocentrul triunghiului determinat de celelalte trei vârfuri.

Ne propunem în continuare să găsim o configurație de patru puncte, trei având o culoare, al patrulea culoarea diferită de cele trei, iar unul dintre puncte să fie ortocentrul triunghiului format de celelalte trei puncte.

Presupunem prin absurd că nu există o astfel de configurație (*).

¹⁾ Profesor, Școala Gimnazială „Gheorghe Țițeica“, Craiova

punctele de pe $O'E$ sunt roșii, iar cele de pe $O'F$ sunt verzi. Fie atunci $\{T\} = O'y' \cap Ox$. Punctul T ar trebui să fie și roșu și verde – imposibil.