Clasa a IX-a

13. a) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluţiile ecuaţiei $5x^2 - 7x + 2 = 0$. Arătaţi că muţimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_1^n + x_2^n \geq 1\}$ conţine toate numerele naturale.

b) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluţiile ecuaţiei $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Determinaţi mulţimea $B = \{n \in \mathbb{N} \mid x_1^n + x_2^n \geq 1\}$.

14. a) Arătaţi că $-1 \leq \dfrac{x}{x^2+x+1} \leq \dfrac{1}{3}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvaţi inecuaţia $\left[\dfrac{x}{x^2+x+1}\right] + x^2 - x + 1 \geq 0$.

15. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+m}{x^2+2x+2}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $\operatorname{Im} f$ conţine cel puţin două numere întregi, pentru orice valoare a lui $m \in \mathbb{R}$.

16. Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc identitatea:

$$\frac{1}{\sin 1 \sin 2} + \frac{1}{\sin 2 \sin 3} + \cdots + \frac{1}{\sin n \sin(n+1)} = \frac{\sin n}{\sin^2 1 \sin(n+1)}.$$

17. a) Exprimaţi lungimile laturilor triunghiului ABC în funcţie de lungimile medianelor m_a, m_b şi m_c.

b) Arătaţi că, dacă două triunghiuri au medianele corespondente congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

18. În triunghiul ABC, O şi H sunt centrul cercului circumscris şi ortocentrul, iar G_1, G_2 şi G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor HBC, HAC, respectiv HAB. Arătaţi că:

a) $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OH}$. b) Dreptele AG_1, BG_2, CG_3 sunt concurente.

c) Centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ este situat pe dreapta OH.

Clasa a X-a

19. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(2,2)$. Fie M simetricul lui A faţă de B, N simetricul lui B faţă de C şi P simetricul lui C faţă de A.

a) Determinaţi coordonatele punctului G, centrul de greutate al triunghiului ABC.

b) Aflaţi coordonatele punctelor M, N, P.

c) Arătaţi că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.

20. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele $d_1 : y = x$, $d_2 : y = 2x$, $d_3 : y = 3x$.

a) Arătaţi că dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente.

b) Determinaţi coordonatele punctelor A, B, C de intersecţie a dreptei $d : x+y+6 = 0$ cu dreptele d_1, d_2, respectiv d_3.

c) Determinaţi valoarea raportului $\dfrac{AB}{BC}$.

21. În sistemul cartezian de coordonate xOy, se consideră punctele $A(0, a\sqrt{3})$, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$, unde $a > 0$.

a) Arătaţi că triunghiul $\triangle ABC$ este echilateral.

b) Calculaţi aria $\triangle ABC$.

22. Determinaţi valorile parametrului real m pentru care există cel puţin un număr real x astfel încât $1 + \log_2(2x^2 + 2x + \frac{7}{2}) \geq \log_2(mx^2 + m)$.

23. Câţi termeni pozitivi conţine şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, dacă $a_n = \dfrac{195}{n! \cdot 4} - \dfrac{A_{n+3}^3}{(n+1)\,!}$?

24. Se consideră binomul $(1+1)^{100}$. Notăm cu T_{k+1} termenul său general, $k \in \{0, 1, \ldots, 100\}$.

a) Rezolvaţi inecuaţia $T_{k+1} < T_{k+2}$.

b) Determinaţi cel mai mare termen al dezvoltării binomului.

c) Deduceţi inegalitatea $C_{100}^{50} > \dfrac{2^{100}}{100}$.