EXTREMELE UNEI SUME DE DISTANȚE LA VÂRFURILE UNUI POLIGON REGULAT

Sergiu Romașcu[1)]

Abstract. This note is a generalization of a problem submitted to the 2012 NMO and it studies the minimal and maximal values of the sum of the distances from a point inside the circumcircle of a regular polygon to its vertices

Keywords: complex coordinate, convex function

MSC : 51M04

La etapa finală a ONM 2012, Problema 2 de la clasa a X-a a avut următorul enunț:

Fie a, b, $c \in \mathbb{C}$, *cu* $a+b+c=0$ *și* $|a|=|b|=|c|=1$. *Demonstrați că* $3 \leqslant |z-a|+|z-b|+|z-c| \leqslant 4$, $\forall z \in \mathbb{C}$ *cu* $|z|=1$.

Scopul acestui articol este generalizarea acestui rezultat, după cum urmează:

Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}(0,1)$. Pentru un punct M din discul $\mathcal{D}(0,1)$ definim suma $S(M)=MA_1+MA_2+\ldots+MA_n$. Atunci

$$\min S(M)=n, \quad \max S(M)=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Demonstrație. Fie $z, a_1, \ldots, a_n$ afixele punctelor $M, A_1, \ldots, A_n$. Avem

$$S(M)=\sum_{k=1}^{n}|z-a_k|=\sum_{k=1}^{n}|\overline{a_k}|\cdot|z-a_k|=\sum_{k=1}^{n}|z\cdot\overline{a_k}-1|.$$

Din inegalitatea triunghiulară a modulului, obținem

$$S(M)\geqslant\left|\sum_{k=1}^{n}(z\overline{a_k}-1)\right|=\left|z\cdot\overline{\sum_{k=1}^{n}a_k}-n\right|=|z\cdot 0-n|=n.$$

Se observă că $S(0)=n$, deci $\min S(M)=n$.

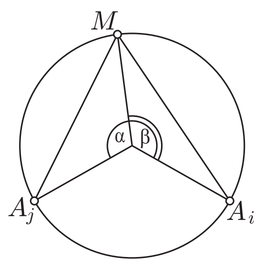
[1)] Profesor, Liceul Teoretic „Mihail Kogălniceanu”, Vaslui.

Fie acum $M(z) \in \mathcal{D}(0,1)$ și fie $N(n)$ și $P(p)$ intersecțiile unei coarde ce trece prin M cu cercul $\mathcal{C}(0,1)$.

Există $\alpha \in [0,1]$ astfel încât $z = \alpha n + (1-\alpha)p$, deci:

$$\begin{aligned} S(M) &= \sum_{k=1}^{n} |\alpha \cdot n + (1-\alpha)p - \alpha a_k - (1-\alpha)a_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\alpha(n - a_k) + (1-\alpha)(p - a_k)| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} (\alpha|n - a_k| + (1-\alpha)|p - a_k|) \\ &= \alpha S(N) + (1-\alpha)S(P) \leqslant \max(S(N), S(P)), \end{aligned}$$

ceea ce arată că $\max S(M) = \max S(N)$.



Fie $M(z) \in \mathcal{C}(0,1)$. Putem presupune că $M \in \widehat{A_1A_2}$.

Cazul 1. $n = 2m$, cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$.

Fie $\alpha = \widehat{A_1OM}$ și $\beta = \widehat{A_2OM}$. Avem $\alpha + \beta = \widehat{A_1OA_2} = \dfrac{\pi}{m}$ și $MA_1 + MA_2 = 2\sin\dfrac{\alpha}{2} + 2\sin\dfrac{\beta}{2}$. Din concavitatea funcției sin pe $\left[0,\pi\right]$ rezultă că $MA_1 + MA_2 \leqslant 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{4} = 4\sin\dfrac{\pi}{4m}$.

Analog obținem relațiile

$$MA_{2m} + MA_3 \leqslant 4\sin\frac{3\pi}{4m}, \ldots, MA_{m+2} + MA_{m+1} \leqslant 4\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}$$

și atunci avem

$$\frac{1}{4} \cdot S(M) \leqslant \sin\frac{\pi}{4m} + \sin\frac{3\pi}{4m} + \ldots + \sin\frac{(2m-1)\pi}{4m} =: S.$$

Dar $2S\sin\dfrac{\pi}{4m} = \cos 0 - \cos\dfrac{2\pi}{4m} + \cos\dfrac{2\pi}{4m} - \cos\dfrac{4\pi}{4m} + \ldots + \cos\dfrac{(2m-2)\pi}{4m} - \cos\dfrac{2m\pi}{4m} = 1 - \cos\dfrac{\pi}{2} = 1$, deci $= \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{4m}}$ și obținem $S(M) \leqslant \dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$.

Cazul 2. $n = 2m+1$, cu $m \in \mathbb{N}^*$.

Ca în cazul 1, avem $S(M) - MA_{m+2} = (MA_1 + MA_2) + (MA_{2m+1} + MA_3) + \ldots + (MA_{m+3} + MA_{m+1}) \leqslant 4\sin\dfrac{\pi}{4m+2} + 4\sin\dfrac{3\pi}{4m+2} + \ldots + 4\sin\dfrac{(2m-1)\pi}{4m+2}$, adică $S(M) \leqslant MA_{m+2} + 4S'$, unde

$$S' = \sin\frac{\pi}{4m+2} + 4\sin\frac{3\pi}{4m+2} + \ldots + 4\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m+2}.$$

Dar $2S'\sin\dfrac{\pi}{4m+2} = \cos 0 - \cos\dfrac{2\pi}{4m+2} + \ldots + \cos\dfrac{(2m-2)\pi}{4m+2} - \cos\dfrac{2m\pi}{4m+2} = 1 - \cos\dfrac{m\pi}{2m+1} = 1 - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{m\pi}{2m+1}\right) = 1 - \sin\dfrac{\pi}{4m+2}$, deci $S' = \dfrac{1-\sin\dfrac{\pi}{4m+2}}{2\sin\dfrac{\pi}{4m+2}} = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{2n}} - \dfrac{1}{2}$. Folosind și $MA_{m+2} \leqslant 2$, obținem $S(M) \leqslant 2 + \dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{2n}} - 2 = \dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$.

În ambele cazuri, avem egalitate dacă M este mijlocul arcului $\widehat{A_1A_2}$, deci $\max S(M) = \dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$. □

Observația 1. Minimul sumei se atinge doar pentru $M = O$.

Într-adevăr, dacă $S(M) = n$, atunci există $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in [0, \infty)$ astfel încât $z \cdot \overline{a_k} - 1 = \alpha_k \cdot (z \cdot \overline{a_1} - 1)$, $\forall k = \overline{1,n}$. Prin însumare obținem $-n = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n 0 \cdot (z \cdot \overline{a_1} - 2)$. Cum $\alpha_1 = 1$ și $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$, avem $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$ și obținem $\dfrac{z-a_1}{0-a_1} = \dfrac{n}{\alpha_1 + \ldots \alpha_n}$, iar apoi $\dfrac{z-a_k}{0-a_k} = \dfrac{n\alpha_k}{\alpha_1 + \ldots \alpha_n}$, $\forall k = \overline{1,n}$.

Deducem că $M \in OA_k$, $\forall k = \overline{1,n}$, deci $M = O$.

Observația 2. Maximul sumei se obține doar când M este mijlocul unuia dintre arcele $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, $\ldots$, $\widehat{A_nA_1}$.

Aceasta reiese din stricta concavitate a funcției sinus pe $[0, \pi]$ și din faptul că $MA_{m+2} = 2$ doar când M este diametral opus cu A_{m+2}.

Observația 3. Suma $S(M)$ pentru $M \in \mathcal{C}(0,1)$ reprezintă perimetrul poligonului convex ce se poate forma, conform generalizării Teoremei lui Pompeiu, cu segmentele $MA_1, \ldots, MA_n$.