

### Clasa a IX-a

13. a) Arătați că  $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\left[\frac{2x+2}{3}\right] - \left[\frac{2x+5}{6}\right] = \frac{x+1}{4}$ .

c) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația

$$\left[\frac{2x+1}{2}\right] + \left[\frac{4x+1}{2}\right] + \left[\frac{8x+1}{2}\right] + \dots + \left[\frac{2^{2023}x+1}{2}\right] = 2023.$$

14. Determinați  $x \in (0, \infty)$  pentru care expresia

$$E(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

are valoarea minimă.

15. Determinați perioada principală a funcției

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin 6x + \cos 10x.$$

**16.** Arătați că, dacă pătratele lungimilor laturilor unui triunghi sunt în progresie aritmetică, atunci și pătratele lungimilor medianelor sunt în progresie aritmetică.

**17.** Fie  $ABCD$  un patrulater convex și  $O$  un punct în planul său astfel încât avem simultan  $OA = OB = OC = OD$  și  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$ . Arătați că  $ABCD$  este dreptunghi.

**18.** Determinați unghiurile triunghiului  $ABC$  în care

$$\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) \quad \text{și} \quad \cos A + \cos B = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 3).$$

### Clasa a X-a

**19.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

a)  $\frac{1}{P_{n-2}} - \frac{1}{P_{n-1}} = \frac{(n-2)^3}{P_n};$

b)  $\frac{2P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4} \cdot P_4} = 105;$

c)  $C_n^8 = C_n^{10}.$

**20.** Numărul natural  $n$  are descompunerea în factori primi

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

a) Arătați că numărul divizorilor lui  $n$  este  $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$ .

b) Arătați că  $n$  este pătrat perfect dacă și numai dacă are un număr impar de divizori.

**21.** a) Arătați că numărul submulțimilor unei mulțimi cu  $n$  elemente este  $2^n$ .

b) Câte submulțimi ale mulțimii  $A = \{1, 2, \dots, 2023\}$  conțin numerele 2020, 2021, 2022, 2023?

**22.** Determinați punctele  $M \in Oy$  situate la distanța 10 față de punctul  $A(6, 1)$ .

**23.** Un triunghi are vârfurile  $M(-1, -2)$ ,  $N(2, 1)$ ,  $P(5, 0)$ .

a) Determinați perimetrul triunghiului format cu mijloacele laturilor triunghiului  $MNP$ .

b) Precizați care este ordinea crescătoare a măsurilor unghiurilor triunghiului.

c) Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului  $MNP$ .

**24.** Fie patrulaterul  $ABCD$ , cu  $A(-3, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(1, 3)$ ,  $D(-2, 3)$ .

a) Arătați că  $ABCD$  este trapez isoscel.

b) Aflați aria trapezului  $ABCD$ .