Clasa a IX-a

13. Se notează cu $S(m)$ mulțimea soluțiilor ecuației $|x-2|+|4-x|=m$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați:

a) $S(4)$;

b) numerele reale m pentru care $\operatorname{card}(\mathbb{Z} \cap S(m))=3$.

14. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, definit prin $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ este monoton și mărginit.

15. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ definit prin $x_0=2$, $x_1=3$, $x_{n+1}=3x_n-2x_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Determinați cel mai mic număr natural k pentru care $x_k>2024$.

16. Arătați că, dacă graficul unei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este simetric față de un punct $M(a,b)$, atunci $f(a+x)+f(a-x)=2b, \forall x \in \mathbb{R}$.

17. Se consideră în plan punctele distincte A, B, C astfel încât $\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$. Determinați numerele reale u și v știind că egalitatea $\overrightarrow{MB}=u\cdot\overrightarrow{MA}+v\cdot\overrightarrow{MC}$ este adevărată pentru orice punct M din plan.

18. Se notează cu D mijlocul laturii BC a unui triunghi ABC și se consideră punctele E, M, N astfel încât $3\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}$, $BE\cap AC=\{M\}$ și $\overrightarrow{AN}=k\cdot\overrightarrow{AB}$. Determinați numărul pozitiv k pentru care dreptele MN și BC sunt paralele.

Clasa a X-a

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=4n+1$. O funcție $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ se numește *specială* dacă $(g\circ f)(n)=n, \forall n\in\mathbb{N}$. Arătați că:

a) Funcția f este injectivă, dar nu este surjectivă.

b) Există cel puțin o funcție specială.

c) Dacă g este o funcție specială, atunci există $u\in\mathbb{N}$ astfel încât $(f\circ g)(u)\neq u$.

20. Demonstrați că:

a) Funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=z+\overline{z}$ nu este nici injectivă, nici surjectivă.

b) Funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z + 2 \cdot \overline{z}$ este inversabilă.

21. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x-3} + \sqrt{1-x} = 1$.

22. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 2x + 4} = x$.

23. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 = 3^{\sqrt{x-4}} + 4^{\sqrt{x^2-5x+4}}$.

24. Determinați cel mai mare număr întreg a care are proprietatea că inegalitatea $\log_{\frac{a-1}{a+1}}(x^2+3) \geqslant 1$ este adevărată pentru orice număr real x.