PENTRU CERCURILE DE ELEVI

O CONGRUENȚĂ DE TRIUNGHIURI ȘI UNELE ÎNTREBĂRI

Steluța Monea[1)] și Adriana Dragomir[2)]

La etapa județeană a Olimpiadei Naționale de Matematică din anul 2018 elevilor din clasa a VI-a le-a fost propusă spre rezolvare următoarea problemă:

P1. *În triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $AB < AC$, AD este înălțime, iar AE este bisectoare, unde $D, E \in BC$. În triunghiul ascuțitunghic $A'B'C'$, cu $A'B' < A'C'$, $A'D'$ este înălțime, iar $A'E'$ este bisectoare, unde $D', E' \in B'C'$. Se știe că $AB \equiv A'B'$, $AD \equiv A'D'$ și $AE \equiv A'E'$. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente.*

Având în vedere punctajele obținute, pentru mulți concurenți, a fost o problemă abordabilă. Cu toate acestea ne punem câteva întrebări interesante legate de acest enunț și la care vom căuta răspuns la nivelul elevilor din clasa a VI-a. Întrebările la care dorim să oferim răspuns sunt următoarele:

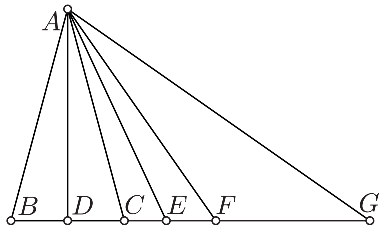
Q1: *În enunț este specificat ca ambele triunghiuri să fie ascuțitunghice. Este esențială acestă condiție?*

Q2: *Elementele care asigură congruența sunt o latură, o înălțime și o bisectoare. Este esențial să pornească din același vârf?*

[1)] Profesor, Colegiul Național „Decebal”, Deva.
[2)] Profesor, Liceul Bănățean, Oțelu Roșu

Q3: *Mai rămâne valabilă congruența dacă înlocuim combinația înălțime-bisectoare cu o altă pereche de linii importante în triunghi?*

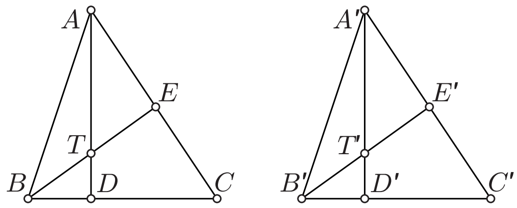
Pentru început vom demonstra că răspunsul la Q1 este afirmativ, adică nu putem elimina condiția ca triunghiurile să fie ascuțitunghice. Pentru aceasta vom considera un triunghi isoscel ABC cu unghiul A având $30°$.



Fie AD înălțimea sa. Pe semidreapta BC, dincolo de C alegem punctele E, F, G astfel încât $\sphericalangle CAE = 10°$, $\sphericalangle CAF = 20°$ și $\sphericalangle CAG = 40°$. Atunci AD este înălțime atât în $\triangle ABG$ cât și în $\triangle ACF$ iar AE este simultan bisectoare în aceleași triunghiuri. Cum $AB \equiv AC$ deducem că triunghiurile ABG și ACF respectă cele trei perechi de congruențe din P1, dar evident nu sunt triunghiuri congruente.

Răspunsul la Q2 este însă negativ, după cum se observă din enunțul problemei următoare:

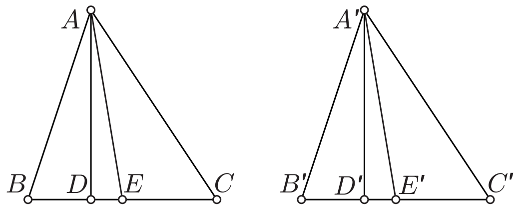
P2. *În triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $AB < AC$, AD este înălțime, $D \in BC$, iar BE este bisectoare, $E \in AC$. În triunghiul ascuțitunghic $A'B'C'$, cu $A'B' < A'C'$, $A'D'$ este înălțime, $D' \in B'C'$, iar $B'E'$ este bisectoare, $E' \in A'C'$. Se știe că $AB \equiv A'B'$, $AD \equiv A'D'$ și $BE \equiv B'E'$. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente.*



Rezolvare. Deoarece, conform cazului CI, $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$, obținem $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle B'A'D'$. Fie $BE \cap AD = \{T\}$ și $B'E' \cap A'D' = \{T'\}$. Cum $\sphericalangle TBA = \frac{\sphericalangle B}{2}$ și $\sphericalangle T'B'A' = \frac{\sphericalangle B'}{2}$, obținem congruența $\triangle TAB \equiv \triangle T'A'B'$ conform cazului ULU. Atunci $TA \equiv T'A'$ și $TB \equiv T'B'$, de unde $TE \equiv T'E'$. Avem și $\sphericalangle ATB \equiv \sphericalangle A'T'B'$ de unde $\sphericalangle ATE \equiv \sphericalangle A'T'E'$. Aceste congruențe conduc la $\triangle TAE \equiv \triangle T'A'E'$ conform cazului LUL. Drept consecință obținem $\sphericalangle TAE \equiv \sphericalangle T'A'E'$ și apoi $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$. De aici $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ conform cazului ULU. $\square$

Răspunsul la Q3 este afirmativ pentru perechea înălțime-mediană și este inclus în problema următoare.

P3. *În triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $AB < AC$, AD este înălțime, iar AE este mediană, unde $D, E \in (BC)$. În triunghiul ascuțitunghic $A'B'C'$, cu $A'B' < A'C'$, $A'D'$ este înălțime, iar $A'E'$ este mediană, unde $D', E' \in (B'C')$. Se știe că $AB \equiv A'B$, $AD \equiv A'D'$ și $AE \equiv A'E'$. Demonstrați că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente.*



Rezolvare. Deoarece $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$, conform cazului CI obținem $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ și $BD \equiv B'D'$.

Pe de altă parte, $\triangle DAE \equiv \triangle D'A'E'$ (CI), de unde $DE \equiv D'E'$. Suntem conduși la $BE \equiv B'E'$, de unde obținem $BC \equiv B'C'$. Atunci rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, conform cazului LUL, ceea ce încheie demonstrația. $\square$

La finalul acestei scurte lecții propunem cititorilor următoare problemă: *rezultatul din P3 rămâne valabil dacă înlocuim înălțimea cu bisectoarea?*