S:L23.312. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculați $\int_1^n \{x\}^2 \, \mathrm{d}x$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

Florin Rotaru, Focșani

S:L23.314. Determinați $a > 0$ știind că $\int_0^a \frac{(a-x)^{2022}}{(a+x)^{2024}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2023}$.

Cătălin Pană, Râmnicu Vâlcea

S:L23.315. Considerăm $(S_4, \cdot)$ grupul permutărilor de gradul patru.

a) Fie H un subgrup propriu al lui S_4. Determinați numărul maxim de elemente din H.

b) Fie $M = \{x \in S_4 \mid x^2 = e\}$. Demonstrați că M nu este subgrup al grupului $(S_4, \cdot)$.

* * *

S:L23.316. Rezolvați în grupul $(S_4, \cdot)$ ecuația $\sigma^{15} = e$.

* * *

S:L23.317. Calculați $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{3x^2 + x + 3} \, \mathrm{d}x$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

S:L23.318. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și a un element fixat din G. Dacă există o funcție surjectivă $f : G \to G$ cu proprietatea că $f(x^3) = f(axa)$, pentru orice $x \in G$, arătați că:

a) $(G, \cdot)$ este grup abelian;

b) există un număr natural k astfel încât $\operatorname{ord}(G) = 2^k$.

Dumitru Crăciun

S:L23.319. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ și $(G, \cdot)$ un grup finit de ordin n. Arătați că numărul n este prim dacă și numai dacă funcțiile $f_k : G \to G$, $f_k(x) = x^k$, $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, sunt automorfisme ale grupului $(G, \cdot)$.

Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc

S:L23.320. Fie funcțiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, unde F este primitivă a lui f.

a) Dați exemplu de funcții f, F cu proprietatea că $[f(x)] = [F(x)] = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Există funcții f, F astfel încât $[f(x)] = [F(x)] = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$?

Emil Vasile, Ploiești

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAȚIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Rezolvați sistemul $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 8 \\ \dfrac{x+y}{3} + \dfrac{x-y}{4} = 11 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

2. a) Dacă $a = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2023}$, care este ultima cifră a numărului $6 \cdot a + 1$?

b) Câte numere naturale dau câtul 2023 la împărțirea cu 2024?

1) La problemele din această rubrică nu se primesc soluții. (N.R.)

Clasa a IX-a

13. Care sunt ecuațiile de gradul al II-lea de forma $x^2+px+q=0$, în care coeficienții reali p și q sunt chiar rădăcinile ecuației date?

14. Determinați șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, cu $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

15. Se consideră un triunghi ABC, cu lungimile laturilor $AB = c$, $AC = b$ și un punct D astfel încât $\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$. Arătați că semidreapta AD este bisectoarea unghiului BAC.

16. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} u+v=2 \\ ux+vy=3 \\ ux^2+vy^2=5 \\ ux^3+vy^3=9 \end{cases}$.

17. În trapezul $ABCD$, cu bazele AB și CD, se notează $AC \cap BD = \{O\}$ și $AD \cap BC = \{V\}$. Fie M mijlocul lui AB și N mijlocul lui CD. Arătați că punctele V, M, O și N sunt colinare.

18. Fie $ABCD$ un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât $2\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$, $2\overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NB}$, $2\overrightarrow{PD} = -\overrightarrow{PC}$ și $2\overrightarrow{QD} = -\overrightarrow{QA}$. Arătați că $MP + QN \leqslant \dfrac{1}{3}(AB + BC + 2CD + 2AD)$.

Clasa a X-a

19. Arătați că $(1+\mathrm{i})^m \cdot (1-\mathrm{i})^n$, cu $m, n \in \mathbb{N}$, este un număr real dacă și numai dacă $(m-n)$ este multiplu de 4.

20. În mulțimea numerelor complexe se consideră ecuațiile $(E_1) : z^3 + 8 = 0$ și $(E_2) : z^3 - 3\mathrm{i}z^2 - 3z + 8 + \mathrm{i} = 0$.

a) Arătați că a este soluție a ecuației (E_2) dacă și numai dacă $a - \mathrm{i}$ este soluție a ecuației (E_1).

b) Rezolvați ecuațiile (E_1) și (E_2).

21. Fie z_1 și z_2 două numere complexe. Știind că $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$ și $|z_1| = |z_2| = 1$, calculați $|z_1 - z_2|$.

22. Fie z_1 și z_2 două numere complexe nenule. Demonstrați că

$$|z_1| + |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|.$$

23. Fie numărul complex $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

b) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 2 \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = 3 \end{cases}$.

24. Determinați numerele complexe nenule z pentru care $\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R}$.