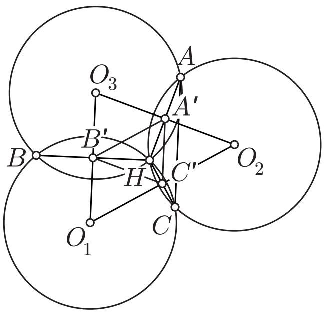
PENTRU CERCURILE DE ELEVI

O PROBLEMĂ DE CONCURS LEGATĂ DE CERCURILE LUI ȚIȚEICA

Ion Pătrașcu[1] și Mihai Miculița[2]

În aceasta lecție prezentăm trei soluții ale unei probleme de concurs și stabilim conexiuni între această problemă și teorema „monedei de cinci lei” a marelui geometru român Gh. Tițeica (1873 - 1939), de la a cărui naștere se împlinesc anul acesta 150 de ani. Enunțul problemei lui Țițeica este următorul.

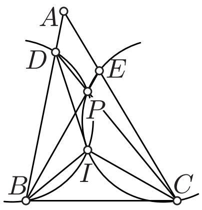
Lema monedei de 5 lei.[3] *Trei cercuri congruente au un punct comun H și se mai intersectează două câte două în punctele A, B, C. Atunci punctul H este ortocentrul triunghiului ABC.*



Demonstrația lemei. Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor congruente date. Notăm cu A', B', C' intersecțiile dreptelor HA, HB, HC cu O_2O_3, O_1O_3, respectiv O_1O_2. Cercurile fiind congruente, punctele A', B', C' sunt mijloacele segmentelor AH, BH respectiv CH. Deoarece $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ sunt linii mijlocii in triunghiul $O_1O_2O_3$, $AH \perp O_2O_3$ și $O_2O_3 \parallel B'C'$, iar $B'C' \parallel BC$, avem că $AH \perp BC$, (1). Analog $BH \perp AC$, (2). Relațiile (1) și (2) arată că H este ortocentrul triunghiului ABC. $\square$

Problema pe care o vom analiza fost propusă de R. Jenodarov, pentru etapa regională a Olimpiadei de Matematică din Rusia, 2019.

Fie ABC un triunghi oarecare și punctele D, E pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $BD = BC = CE$. Notăm cu P intersecția dreptelor BE și CD, iar cu I al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor PDB si PCE. Arătați că punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.



Soluția 1 (din broșura concursului). Vom arăta că I – centrul cercului înscris triunghiului ABC – este pe cercul circumscris triunghiului BPD. Cu alte cuvinte, arătăm că punctele B, D, P, I sunt conciclice. Deoarece ipoteza este simetrică în raport cu B, D și C, E, analog rezultă că și punctele C, E, P, I sunt conciclice și astfel concluzia este demonstrată.

---

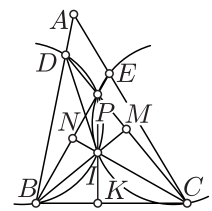
[1] Profesor, Craiova

[2] Profesor, Oradea

[3] Rezultatul a fost descoperit de Țițeica pe când era elev și, în timpul unui examen, desena cercuri cu ajutorul unei monede de 5 lei

Este suficient să demonstrăm că $\sphericalangle BID = \sphericalangle BPD$. Deoarece $BC = BD$ și $(BI$ este bisectoare, avem $\sphericalangle BIC = \sphericalangle BID$. Se știe că $\sphericalangle BIC = 90^\circ + A/2$, deci $\sphericalangle BID = 90^\circ + A/2$. Apoi, $\sphericalangle BPD = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB$. Dar $\sphericalangle EBC = 90^\circ - C/2$ și $\sphericalangle PCB = 90^\circ - B/2$. Prin urmare,

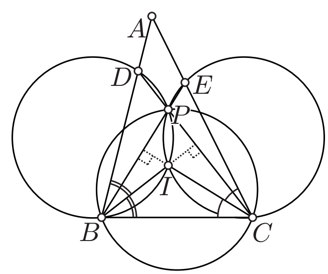
$$\sphericalangle BPD = 180^\circ - B/2 - C/2 = 90^\circ + A/2 = \sphericalangle BID.$$



Soluția 2 (Mihai Miculița). Fie I centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar $M = BI \cap PC$, $N = CI \cap PB$ și $K = PI \cap BC$. Problema revine acum la a arăta că I aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor PDB și PCE.

Din $BD = BC$ și $(BI$ bisectoarea $\sphericalangle B$ obținem că $BM \perp PC$, iar din $CE = BC$ și $(CI$ bisectoarea $\sphericalangle C$ obținem că $CN \perp PB$. Relațiile precedente conduc la concluzia că $PNIM$ și $BCMN$ sunt patrulatere inscriptibile. De aici reiese că $\sphericalangle PIM = \sphericalangle PNM = \sphericalangle BCD$.

Dar $BD = BC$ implică $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDB$. Reiese $\sphericalangle PIM = \sphericalangle CDB$, deci patrulaterul $BIPD$ este inscriptibil, adică I se află pe cercul PDB. Analog, I aparține cercului circumscris triunghiului PCE.



Soluția 3 (Ion Pătrașcu). Vom demonstra că al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor PBD și PCE, notat cu I, este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Pentru aceasta folosim lema monedei de 5 lei.

Relația din ipoteză $BD = BC = CE$, împreună cu $\sphericalangle BPD = \sphericalangle CPE = 180^\circ - \sphericalangle BPC$ conduce, cu ajutorul teoremei sinusurilor aplicată în triunghiurile PBC, PCE și PBD la concluzia că cercurile circumscrise acestor triunghiuri sunt congruente. Aplicăm lema și rezultă că punctul I este ortocentrul triunghiului PBC, deci $BI \perp PC$ și $CI \perp BP$. Deoarece triunghiurile CBD și BCE sunt isoscele, rezultă că înălțimile BI și CI sunt bisectoarele unghiurilor ABC, respectiv ACB, prin urmare I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.