Clasa a IX-a

13. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$ astfel încât $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, arătați că $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 x_3}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n x_1}{x_n + x_1} < \frac{1}{2}$.

14. Arătați că, pentru orice număr natural nenul n:

a) numărul $(n+1)(n+2)\cdots(2n)$ se divide prin 2^n, dar nu se divide prin 2^{n+1};

b) numărul n admite o reprezentare de forma $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm m^2$, pentru o anumită alegere a semnelor $+$ sau $-$ (unde m depinde de n).

15. Arătați că, dacă $x \in \mathbb{R}^*$ și $x + x^{-1} \in \mathbb{Z}$, atunci $x^n + x^{-n} \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

16. În exteriorul triunghiului isoscel ABC, cu $AB = AC$, se construiesc pătratele $ABDE$ și $ACFG$. Arătați că vectorii $\overrightarrow{EG}$ și $\overrightarrow{BC}$ au aceeași direcție.

17. În triunghiul DEF se consideră A, B și C mijloacele laturilor DE, EF, respectiv FD. Arătați că, pentru orice punct M din planul triunghiului, are loc egalitatea $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

18. Demonstrați că într-un triunghi ABC, cu ortocentrul H, are loc relația $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HM}$, unde M este punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC.

Clasa a X-a

19. Arătați că numărul $\lg 2$ este irațional.

20. Demonstrați egalitățile:

a) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36} = 24$.

b) $\log_{ab} c = \dfrac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$, unde $a, b, c, ab \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

21. Demonstrați că, dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$, atunci:

a) $\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3$; b) $\log_2 (a+b) + \log_2 \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 2$.

22. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este adevărată inegalitatea

$$\log_{n!}^2 n + \log_{n!}^2 (n-1) + \log_{n!}^2 (n-2)! \geq \frac{1}{3}.$$

23. Arătați că numărul 5^{2016} are 1410 cifre, prima cifră fiind 1.

24. Determinați domeniul maxim de definiție al funcțiilor:

a) $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{3-x}{1-4x}}$; b) $g(x) = \log_{\frac{x-1}{2x-1}} \left(x^2 - x - 2\right)$.

Clasa a XI-a