PENTRU CERCURILE DE ELEVI

TREI SOLUȚII PENTRU PROBLEMA E:16475

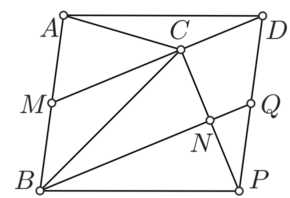
NECULAI STANCIU[1)] și TITU ZVONARU[2)]

Multe probleme de matematică pot avea soluții diverse: unele mai ingenioase, altele mai tehnice. Considerăm că urmărirea obținerii a cât mai multe soluții trebuie să fie o activitate continuă a celui interesat de matematică. Exemplificăm cu problema E:16475 din GM-B nr. 1/2023, propusă de Ion Neață, care următorul enunț.

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, iar M mijlocul laturii AB. Pe prelungirea lui MC se consideră punctul D astfel încât $C \in (MD)$. Dacă $\sphericalangle AMC = 60^\circ$ și $AB = 2CD$, demonstrați că $BC = AD$.

La rezolvarea apărută în GM-B 6-7-8/2023 putem adăuga următoarele soluții.

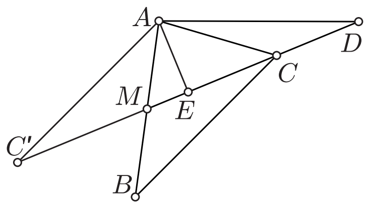
Soluția 1. Perpendiculara în C pe MD se intersectează cu paralela prin D la AB în punctul P. Deoarece $\sphericalangle CDP = \sphericalangle AMC = 60^\circ$, din triunghiul dreptunghic PCD deducem că $DP = 2CD = AB$; atunci patrulaterul $ABPD$ este paralelogram. Paralela prin B la DM intersectează pe PC în N și pe PD în Q. Din



1) Profesor, Buzău.

2) Matematician, Comănești.

paralelogramul $MBQD$ deducem că $QD = MB = \frac{AB}{2}$. Cum $DP = AB$, rezultă că punctul Q este mijlocul lui DP. Atunci și N este mijlocul lui PC. În triunghiul BCP, înălțimea BN este mediană, deci $BC = BP = AD$.



Soluția 2. Fie C' simetricul lui C față de M; atunci patrulaterul $AC'BC$ este paralelogram. Notăm cu E proiecția punctului A pe $C'D$. Din triunghiul dreptunghic AME obținem $ME = \frac{AM}{2} = \frac{AB}{4}$. Rezultă că $C'E = C'M + ME = CM + \frac{AB}{4}$, $DE = DC + CM - ME = \frac{AB}{2} + CM - \frac{AB}{4} = CM + \frac{AB}{4}$. Deducem că triunghiul $AC'D$ este isoscel, deci $BC = AC' = AD$.

Soluția 3 (cu calcule; chiar dacă este mai puțin spectaculoasă, are avantajul că „merge direct la țintă”). Cu notațiile uzuale în triunghi avem

$$b^2 = m_c^2 + \frac{c^2}{4} - 2cm_c \cos 60^\circ, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

deci $cm_c = a^2 - b^2$ și

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{c^2}{4} + \left(m_c + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c}{2}\left(m_c + \frac{c}{2}\right) \\ &= \frac{c^2}{4} + \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{a^2-b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = a^2. \end{aligned}$$