Clasa a IX-a

13. Rezolvaţi inecuaţia $\sqrt{x-2} \geqslant x-4$.

14. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ admite soluţie unică sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=m \end{cases}$?

15. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că, dacă p, $q>0$ şi $p+q=1$, atunci $f(px_1+qx_2)\leqslant pf(x_1)+qf(x_2)$, pentru orice $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi $f([-1,\,1])$, în funcţie de a şi b.

16. Considerăm triunghiul ABC, dreptunghic în A. Luăm $CC'\perp AC$, cu $CC'=AC$ şi B,C' de părţi diferite ale dreptei AC, precum şi $BB'\perp AB$, cu $BB'=AB$ şi B',C de părţi diferite ale dreptei AB. Arătaţi că dreptele BC', CB' şi înălţimea AA' sunt concurente.

17. Arătaţi că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sin^n x+\cos^n x=1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $n=2$.

18. Arătaţi că $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Clasa a X-a

19. a) Arătaţi că funcţia $f:\left[\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$ este inversabilă, iar inversa ei este funcţia $g:[-1,1]\to\left[\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2}\right]$, $g(x)=4\pi+\arcsin x$.

20. a) Arătaţi că $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}\right)>\dfrac{\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}$.

b) Arătaţi că $\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}\right)<\dfrac{\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{2}$.

21. Arătaţi că $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\arccos\sqrt{1-x^2}$, pentru orice $x\in(0,1)$.

22. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile :

a) $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{5}{8}$. b) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=-1$.

23. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}\leqslant 3$.

24. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}$.