GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXVIII nr. 1 **ianuarie 2023**

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

GENERALIZĂRI ALE PROBLEMEI E:16224

Neculai Roman[1)]

Abstract. This article presents three generalisations of a recent geometry problem from this journal

Keywords: angle bisector, incenter, othhocenter, perpendicular

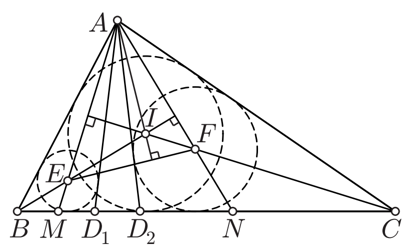
MSC : 51M04

În această notă matematică vom prezenta trei generalizări ale problemei E:16224 din Gazeta Matematică seria B nr. 3/2022, propusă de Ionel Tudor. Enunțul problemei este următorul:

În triunghiul ABC, dreptunghic în A, construim înălțimea AD, cu $D \in BC$. Fie E intersecția bisectoarelor unghiurilor ABC și BAD, F intersecția bisectoarelor unghiurilor ACB și CAD și I intersecția dreptelor BE și CF. Arătați că dreptele AI și EF sunt perpendiculare.

Generalizarea 1.

Considerăm un triunghi ABC și punctele D_1, D_2 pe segmentul BC astfel încât $\sphericalangle BAC$ este cel mai mare unghi al triunghiului, $\sphericalangle CAD_1 \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BAD_2 \equiv \sphericalangle ACB$. Fie punctele E, F și I centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD_1, ACD_2, respectiv ABC. Atunci dreptele AI și EF sunt perpendiculare.



Demonstrație. Fie $\{M\} = AE \cap BC$ și $\{N\} = AF \cap BC$.

Avem $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAM = \sphericalangle CAD_1 + \sphericalangle D_1AM = \sphericalangle CAM$. Astfel, triunghiul CAM este isoscel ($CA = CM$). În triunghiul CAM isoscel, bisectoarea CF este și înălțime, deci $CF \perp AE$. Analog $BE \perp AF$.

---

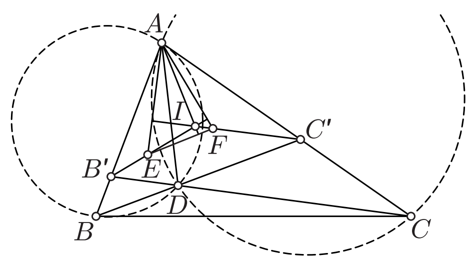
1) Profesor, Școala Gimnazială „V. Alecsandri“, Mircești, Iași

Prin urmare punctul I este ortocentrul triunghiului AEF, deci $AI \perp EF$.

Observaţie. Dacă $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ atunci punctele D_1 și D_2 sunt identice cu punctul D, unde $AD \perp BC$, $D \in BC$ și obținem problema E: 16224.

Generalizarea 2.

Fie ABC un triunghi. Cercul care trece prin punctele A și B și este tangent la dreapta AC și cercul care trece prin punctele A și C și este tangent la dreapta AB se taie a doua oară în punctul D. Dreapta DC intersectează dreapta AB în punctul B' și dreapta BD intersectează dreapta AC în punctul C'. Fie E intersecția bisectoarelor unghiurilor $AB'C$ și BAD, F intersecția bisectoarelor unghiurilor $AC'B$ și CAD și I intersecția dreptelor $B'E$ și $C'F$. Atunci dreptele AI și EF sunt perpendiculare.



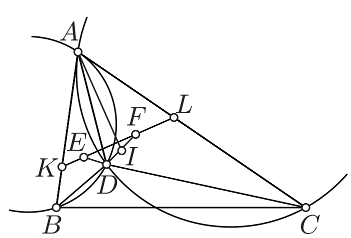
Demonstrație. Fie $\{M\} = AE \cap BD$ și $\{N\} = AF \cap CD$.

Avem $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$.

Din $\sphericalangle AMC' = \sphericalangle ABD + \sphericalangle BAM = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAM = \sphericalangle C'AM$ rezultă că triunghiul $C'AM$ este isoscel, deci bisectoarea $C'F$ este și înălțime, deci $C'F \perp AE$. Analog $B'E \perp AF$. Prin urmare, în triunghiul AEF, I este ortocentru, deci $AI \perp EF$.

Observaţie. Dacă $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ atunci $AD \perp BC$, $D \in BC$, $B' = B$, $C' = C$ și obținem problema E: 16224.

Generalizarea 3.



Fie ABC un triunghi. Cercul care trece prin punctele A și B și este tangent la dreapta AC și cercul care trece prin punctele A și C și este tangent la dreapta AB se taie a doua oară în punctul D. Fie punctele E, F și I centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD, ACD, respectiv ABC. Atunci dreptele AI și EF sunt perpendiculare.

Demonstrație. Fie $\{K\} = EF \cap AB$ și $\{L\} = EF \cap AC$. Avem $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$.

Deci $\triangle DBA \sim \triangle DAC$. Prin urmare există o asemănare (similitudine plană) $\mathcal{S} = H_D^k \circ R_D^{\pi - A}$ unde $k = \frac{AB}{AC}$ și $A = \sphericalangle BAC$, care transformă triunghiul DAC în triunghiul DBA. Cum centrele cercurilor înscrise se corespund prin $\mathcal{S}$, avem $\mathcal{S}(F) = E$. Rezultă că triunghiul DEF este asemenea cu triunghiurile DAC și DBA. Din $\triangle DEF \sim \triangle DBA$ rezultă $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle DBA$. Prin urmare, patrulaterul $BDEK$ este inscriptibil și deci $\sphericalangle AKL \equiv \sphericalangle BDE$. Analog $\sphericalangle ALK \equiv \sphericalangle CDF$. Dar $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CDF = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Deci $\sphericalangle AKL \equiv \sphericalangle ALK$, adică $\triangle AKL$ este isoscel. Prin urmare, bisectoarea AI a $\sphericalangle BAC$ este și înălțime în triunghiul isoscel AKL, de unde rezultă concluzia $AI \perp EF$.

Observație. Dacă $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ atunci $D \in BC$, $AD \perp BC$ și obținem problema E: 16224.