PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE

Clasa a IX-a

13. Arătaţi că, dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $a^2+b^2+c^2 < 1$, atunci $ab + bc + ca \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

14. a) Fie a, b numere naturale, astfel încât $7 \mid (a^2 + b^2)$. Arătaţi că $7\,|a$ şi $7\,|b$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $x^2 + y^2 = 7xy$.

15. Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $\sqrt{n^2 + 2n + 2}$ are primele două zecimale de după virgulă zerouri.

16. Fie ABC un triunghi în care medianele BM şi CN sunt perpendiculare. Arătaţi că $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

17. Fie triunghiul ABC fixat. Se numeşte punctul A – *Humpty* al triunghiului ABC, punctul P cu proprietatea că $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PBC$ şi $\sphericalangle CAP = \sphericalangle PCB$. Arătaţi că:

a) punctul P este unic;

b) punctul P se găseşte pe mediana din A a triunghiului ABC;

c) punctul P se găseşte pe cercul circumscris triunghiului HBC, unde H este ortocentrul triunghiului ABC;

d) $HP \perp AP$.

18. Fie triunghiul ABC fixat. Se numeşte punctul A – *Dumpty* al triunghiului ABC, punctul Q cu proprietatea că $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle ACQ$ şi $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABQ$. Arătaţi că:

a) Q se află pe cercul circumscris triunghiului OBC, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC;

b) $OQ \perp AQ$.

Clasa a X-a

19. Se consideră numărul real x strict pozitiv şi un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_n(x) = (\sqrt{x})^{100-n}(\sqrt[3]{x})^n, (\forall)n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că există un termen al şirului care este independent de x.

b) Determinaţi numărul natural n pentru care $a_n(\sqrt[10]{2}) = 16$.

20. Calculaţi valoarea expresiei

$$E(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

pentru $x = \frac{a^2+b^2}{2ab}$, ştiind că $a > 0$, $b > 0$ şi $a \neq b$.

21. Comparaţi numerele :

a) $a = \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{8}$ şi $b = \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{7}$.

b) $a = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $c = \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{11}$.

22. Demonstraţi inegalitatea $\sqrt[3]{a^3+b^3} \leq \sqrt{a^2+b^2}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

23. Fie $a, x, y \in (0, +\infty)$ care verifică egalităţile $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 2a\sqrt{2}$ şi $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{a}$. Arătaţi că $x = y$.

24. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^4 + 5x^2 + 5}$. Arătaţi că graficul funcţiei nu conţine puncte cu ambele coordonate numere întregi.