

O GENERALIZARE A TEOREMEI LUI TRIF

RADU NICOLAE GOLOGAN¹⁾ DAN ȘTEFAN MARINESCU²⁾ MIHAI MONEA³⁾

Abstract. The aim of this note is to present, using the Riemann integral, some results involving the limit of some convergent sequences.

Keywords: funcții continue, funcții integrabile, limite de șiruri

MSC : 26A06

În unul dintre numerele recente ale revistei The College Mathematics Journal [7] a fost propusă spre rezolvare următoarea problemă.

Problema 1. *Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale convergent la $a \in \mathbb{R}$ și $k, l \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $k < l$. Calculați*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{nk+1} + \frac{a_2}{nk+2} + \frac{a_3}{nk+3} + \dots + \frac{a_{(l-k)n}}{nl} \right).$$

Un caz particular al acestei probleme îl găsim în [8]. Ideea care stă la baza acestui enunț nu este nouă și ne duce cu gândul la o problemă înrudită, dată la faza județeană a ONM 2001 [6], al cărei enunț este următorul.

Problema 2. *Demonstrați că există un șir de numere $(a_n)_{n \geq 1}$ pentru care $a_n \in \{0, 1\}$ și*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n+2} + \frac{a_3}{n+3} + \dots + \frac{a_n}{2n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Articolul [4] ne arată care este motivul pentru care limita cerută la Problema 1 este $a \ln \frac{l}{k}$. Tot acolo descoperim și de ce în enunțul Problemei 2 valoarea $\frac{1}{2}$ putea fi înlocuită cu orice element din intervalul $[0, \ln 2]$.

¹⁾Prof. univ. dr., Universitatea Politehnica București

²⁾Prof. dr., Colegiul Național „Iancu de Hunedoara“, Hunedoara

³⁾Profesor, Colegiul Național „Decebal“, Deva

Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx,$$

este firesc ca această idee să poată fi abordată și prin intermediul calculului integral. Acest lucru s-a realizat inclusiv la nivel superior, cum ar fi în [1]. Rezultatul pe care dorim să îl readucem în atenția cititorilor este însă cel datorat lui Trif [5] și pe care îl reluăm în continuare.

Teorema 3. (TRIF) *Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata mărginită pe $[0, 1]$. Notăm $I = \int_0^1 f(x) dx$. Atunci, pentru orice număr u situat între 0 și I există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ pentru care $a_n \in \{0, 1\}$ și*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k f\left(\frac{k}{n}\right) = u.$$

Pentru $f(x) = \frac{1}{1+x}$ și $u = \frac{1}{2}$ obținem, ca un caz particular, Problema 2.

Pornind de la cele descrise anterior, vom prezenta o formă mai generală a Teoremei 3 și vom demonstra că rezultatul rămâne valabil și pentru o clasă mai largă de funcții: clasa funcțiilor continue. Pentru aceasta vom face apel la Teorema de aproximare a lui Weierstrass (de exemplu, [4]), pe care o reamintim.

Teorema 4. (WEIERSTRASS) *Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci există un șir de polinoame $(P_n)_{n \geq 1}$ uniform convergent la f .*

Pentru a completa demersul nostru avem nevoie de un set de rezultate preliminare pe care le prezentăm în continuare, însoțite de demonstrațiile corespunzătoare.

Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale cu proprietatea că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a.$$

se numește *Cesáro-convergent*. Este ușor de verificat că orice șir convergent este și Cesáro-convergent. Reciproca nu este valabilă, șirul $(-1)^n$ fiind un contraexemplu în acest sens.

În cele ce urmează, fie $s \in [1, \infty)$. Vom spune că un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ este *s-Cesáro-convergent* dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^s} = a.$$

Cu acest cadru general fixat, vom demonstra câteva leme.

Lema 5. *Fie $s \in [1, \infty)$ și $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale s-Cesáro-convergent la $a \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $p \in \mathbb{N}$ avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+s}} \sum_{k=1}^n a_k k^p = \frac{as}{p+s}.$$

Demonstrație. Vom calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k/n^s - \sum_{k=1}^n a_k k^p/n^{p+s} \right)$ folosind Lema Cesáro-Stolz. Obținem

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)^p \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k k^p) - (n^p \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n a_k k^p)}{(n+1)^{p+s} - n^{p+s}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)^p - n^p) \sum_{k=1}^n a_k}{(n+1)^{p+s} - n^{p+s}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)^p - n^p)}{(n+1)^{p+s} - n^{p+s}} \cdot n^s \cdot \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n^s} = \\ &= a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^p - 1}{(1 + \frac{1}{n})^{p+s} - 1} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n})^{p+s} - 1} = \frac{ap}{p+s}. \end{aligned}$$

De aici obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+s}} \sum_{k=1}^n a_k k^p = a - \frac{ap}{p+s} = \frac{as}{p+s}$, ceea ce trebuia demonstrat. $\square$

Lema 6. Fie $s \in [1, \infty)$ și $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale s -Cesáro-convergent la $a \in \mathbb{R}$. Fie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție polinomială. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k g\left(\frac{k}{n}\right) = sa \int_0^1 x^{s-1} g(x) dx,$$

Demonstrație. Dacă gradul lui g este $p \in \mathbb{N}$, atunci există numerele reale $b_0, b_1, \dots, b_p$ astfel încât $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_p x^p$, pentru orice $x \in [0, 1]$. În continuare aplicăm lema anterioară și obținem

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k g\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^p b_j \left(\frac{k}{n}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^p b_j \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{j+s}} \sum_{k=1}^n a_k k^j = \sum_{j=0}^p b_j \cdot \frac{as}{j+s} = sa \cdot \sum_{j=0}^p \frac{b_j}{j+s} \\ &= sa \sum_{j=0}^p b_j \int_0^1 x^{s+j-1} dx = sa \int_0^1 x^{s-1} \sum_{j=0}^p b_j x^j dx = sa \int_0^1 g(x) dx, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. $\square$

În continuare, putem prezenta rezultatele principale ale acestei note. Teorema 7 reprezintă o generalizare în cazul real a Teoremei 2 din [1], iar Teorema 9 este o generalizare a Teoremei lui Trif din [5].

Teorema 7. Fie $s \in [1, \infty)$ și $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale s -Cesáro-convergent la $a \in \mathbb{R}$, astfel încât există $M > 0$ pentru care

$$\frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|}{n^s} < M, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k f\left(\frac{k}{n}\right) = sa \int_0^1 x^{s-1} f(x) dx.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Teorema 4 ne asigură că există o funcție polinomială $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \forall x \in [0, 1]$. Atunci

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k f\left(\frac{k}{n}\right) - sa \int_0^1 x^{s-1} f(x) dx \right| \leq \left| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k g\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \\ & + \left| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k g\left(\frac{k}{n}\right) - sa \int_0^1 x^{s-1} g(x) dx \right| + \left| sa \int_0^1 x^{s-1} f(x) dx - sa \int_0^1 x^{s-1} g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n |a_k| \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \left| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k g\left(\frac{k}{n}\right) - sa \int_0^1 x^{s-1} g(x) dx \right| + s|a| \cdot \\ & \cdot \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \left| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k g\left(\frac{k}{n}\right) - sa \int_0^1 x^{s-1} g(x) dx \right| + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{3M}. \end{aligned}$$

Conform Lemei 6, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k g\left(\frac{k}{n}\right) - sa \int_0^1 x^{s-1} g(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

pentru orice $n \geq n_0$. Ipoteza conduce și la relația $|a| \leq M$ și atunci obținem

$$\left| \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n a_k f\left(\frac{k}{n}\right) - sa \int_0^1 x^{s-1} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Cum ε a fost ales arbitrar, deducem concluzia. $\square$

Corolarul 8. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale convergent la $a \in \mathbb{R}$. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k f\left(\frac{k}{n}\right) = a \int_0^1 f(t) dt.$$

Demonstrație. Lema Cesáro-Stolz ne arată că orice șir convergent la a este și Cesáro-convergent la același număr. Pe de altă parte, orice șir convergent este mărginit, deci există $M > 0$ astfel încât $|a_n| < M$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| < M$, deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ satisface ipotezele Teoremei 8 în cazul $s = 1$. Obținem atunci concluzia ca o consecință a acestei teoreme. $\square$

Teorema 9. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $I = \int_0^1 f(t)dt$. Atunci, pentru orice $q \in \mathbb{Z}$ și orice L situat în intervalul închis delimitat de qI și $(q+1)I$, există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_n \in \{q, q+1\}$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k f\left(\frac{k}{n}\right) = L.$$

Demonstrație. Dacă L este un număr ca în enunț atunci există $\alpha \in [0, 1]$ astfel încât $L = (1 - \alpha)qI + \alpha(q+1)I = (q + \alpha)I$. În continuare considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit, pentru orice $n \geq 1$, prin $a_n = [(n+1)(q+\alpha)] - [n(q+\alpha)]$. Atunci

$$\begin{aligned} a_n &= [(n+1)q + (n+1)\alpha] - [nq + n\alpha] \\ &= (n+1)q + [(n+1)\alpha] - nq - [n\alpha] = q + [(n+1)\alpha] - [n\alpha]. \end{aligned}$$

Cum $\alpha \in [0, 1]$ și $(n+1)\alpha - n\alpha = \alpha$ deducem că $[(n+1)\alpha] - [n\alpha] \in \{0, 1\}$, ceea ce conduce la concluzia $a_n \in \{q, q+1\}$.

Apoi $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ([(k+1)(q+\alpha)] - [k(q+\alpha)]) = \frac{1}{n} ([(n+1)(q+\alpha)] - [q+\alpha])$. Deoarece $(n+1)(q+\alpha) - 1 < [(n+1)(q+\alpha)] \leq (n+1)(q+\alpha)$, criteriul cleștelui conduce la $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_n/n = q + \alpha$, deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este Cesáro-convergent la $q + \alpha$. În plus, dacă considerăm $M > \max\{|q|, |q+1|\}$, avem și $\sum_{k=1}^n |a_k|/n < M$. Atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ verifică ipotezele Teoremei 7 în cazul $s = 1$. Aceeași teoremă ne conduce la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k f\left(\frac{k}{n}\right) = (q + \alpha) \int_0^1 f(t)dt = L,$$

ceea ce încheie demonstrația. $\square$

În continuare vom obține soluții ale Problemelor 1 și 2 ca o consecință a rezultatelor precedente. Într-adevăr, dacă considerăm funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ vom avea $\int_0^1 f(x)dx = \ln 2$. Deoarece

$$\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n+2} + \frac{a_3}{n+3} + \dots + \frac{a_n}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k f\left(\frac{k}{n}\right),$$

concluzia Problemei 2 este o consecință a Teoremei 9 în cazul $q = 0$.

Pe de altă parte, considerăm un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale convergent la $a \in \mathbb{R}$ și $k, l \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $k < l$. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{k/(l-k)+x}$. Atunci $\int_0^1 f(x)dx = \ln(l/k)$. Acum

$$\begin{aligned} &\frac{a_1}{nk+1} + \frac{a_2}{nk+2} + \frac{a_3}{nk+3} + \dots + \frac{a_{(l-k)n}}{nl} = \\ &= \sum_{i=1}^{(l-k)n} \frac{a_k}{(l-k)n \cdot \frac{k}{l-k} + i} = \frac{1}{(l-k)n} \sum_{i=1}^{(l-k)n} a_i f\left(\frac{i}{(l-k)n}\right), \end{aligned}$$

ceea ce arată că șirul din enunț este un subșir al șirului definit de Corolarul 8. Atunci obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{nk+1} + \frac{a_2}{nk+2} + \frac{a_3}{nk+3} + \dots + \frac{a_{(l-n)n}}{nl} \right) = a \int_0^1 f(x) = a \ln \frac{l}{k},$$

adică rezultatul menționat la începutul acestui articol.

În încheiere vom prezenta o nouă soluție pentru o versiune mai generală a unei probleme propuse la etapa județeană a Olimpiadei Naționale de Matematică 2022 [9] la clasa a XI-a. Unele aspecte pe această temă sunt abordate și în [3].

Problema 10. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n+k}$, pentru orice $n \geq 1$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demonstrație. Inducția ne conduce la concluzia $x_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$. Notăm $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. Atunci obținem $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n(n+1)} (nx_{n+1} - \sum_{k=1}^n x_k) = \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k) \leq 0$ conform ipotezei. Deducem că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este descrescător, deci și convergent, deoarece este un șir format cu numere pozitive. Fie y limita sa. În consecință, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este Cesáro-convergent la y . Apoi $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| = y_n \leq y_1$, deci putem aplica Corolarul 8. Obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1 + \frac{k}{n}} = y \ln 2.$$

Dar $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = y \ln 2$, de unde $y = 0$, ceea ce conduce apoi la concluzia problemei.

BIBLIOGRAFIE

- [1] M.C. Anisiu, V. Anisiu, *Sequences of linear operators related to Cesáro-convergent sequences*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **31** (2002), no. 2, pp. 135-141.
- [2] R.N. Gologan, *On a convergences of a partial sum and a contest problem*, Gaz. Mat., seria A, **XIX** (2001), no. 3, pp. 70-72.
- [3] R.N. Gologan, E. Păltănea, *Asupra estimării unui șir recurent*, Gaz. Mat., seria B, **CXXVII** (2022), no. 4, pp. 173-177.
- [4] C.P. Niculescu, *Fundamentele Analizei Matematice*, Ed. Acad. Române, București, 1996.
- [5] T. Trif, *Asupra unei probleme de la faza județeană a Olimpiadei Naționale de Matematică 2001*, Gaz. Mat., seria B, **CVI** (2001), no. 11, pp. 391-395.
- [6] ***, *The 52nd National Mathematical Olympiad*, S.S.M.R., 2001.
- [7] ***, *Problem 1009*, The College Mathematics Journal, **44** (2013), pag. 326.
- [8] ***, *Problema 28150*, Gaz. Mat., seria B, **CXXVI** (2021), no. 9, pag. 428.
- [9] ***, <https://rms.unibuc.ro/onm2022>.