

Clasa a IX-a

13. Fie numerele reale nenule a, b, c care satisfac egalitatea $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = 0$. Arătați că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile reale și de semne contrare.

14. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - c) + (x - b)(x - d)$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b < c < d$.

a) Arătați că $f(a)f(c) < 0$.

b) Demonstrați că $(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd)$.

15. Considerăm numerele reale $a \neq 0$ și $a_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^n (ax - a_i)^2$.

a) Arătați că valoarea minimă a funcției f nu depinde de a .

b) Arătați că, dacă $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, atunci $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq \sqrt{n}$.

16. Arătați că triunghiul ABC în care are loc una dintre relațiile:

i) $a^2 \sin 2B = \frac{abc}{R}$,

ii) $\cos B + \cos C = \frac{b+c}{a}$,

iii) $\sin A + \sin B = \cos A + \cos B$

este dreptunghic.

17. Arătați că triunghiul ABC în care are loc una dintre relațiile:

i) $a = 2b \sin \frac{A}{2}$,

ii) $a = 2bc \cos C$,

iii) $b + c = 4R \cos \frac{A}{2}$

este isoscel.

18. a) Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC , arătați că $AI = \sqrt{\frac{bcp-a}{p}}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$.

b) Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , arătați că $OI^2 = R(R - 2r)$ (Euler).

Clasa a X-a

19. a) Câte submulțimi ale mulțimii $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ conțin elementele 3 și 8?

b) Care este probabilitatea ca, alegând două numere din mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, cel puțin unul să fie prim?

20. a) Determinați $x \in (0, \infty)$ pentru care al treilea termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} + x^{\lg \sqrt{x}}\right)^9$ este 36000.

b) Determinați suma coeficienților dezvoltării $(2x^2 - 3y)^{2022}$.

21. a) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $[(2 + \sqrt{3})^n]$ este impar, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

b) Arătați că, dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2x - 2 = 0$, atunci $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determinați cea mai mare putere naturală a lui 2 prin care se divide numărul $[(1 + \sqrt{3})^{2022}]$.

22. Se consideră triunghiul ABC , având vârfurile $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ și $C(6, 6)$.

a) Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC și aflați raza acestuia.

b) Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC .

23. Se dau două vârfuri $A(3, -1)$ și $B(5, 7)$ ale triunghiului ABC și $H(4, -1)$ ortocentrul triunghiului ABC .

a) Scrieți ecuațiile laturilor triunghiului.

b) Determinați coordonatele vârfului C al triunghiului.

c) Calculați aria triunghiului ABC .

24. Determinați coordonatele punctului P , situat pe axa absciselor, pentru care suma distanțelor de la P la punctele $M(1, 2)$ și $N(3, 4)$ este minimă.