Clasa a IX-a

13. Se consideră familia de funcții de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$, $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Arătați că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o dreaptă.

b) Dacă A și B sunt punctele de intersecție ale unei parabole oarecare din familie cu axa Ox, iar F este proiecția vârfului V al parabolei pe axa Ox, arătați că $AB = 2FV$.

c) Arătați că toate parabolele asociate funcțiilor date trec printr-un punct fix.

14. Determinați o funcție de gradul al doilea care îndeplinește simultan condițiile:

a) parabola asociată trece prin punctul A(2,1);

b) parabola asociată are vârful situat pe dreapta de ecuație $y = 2x + 1$;

c) parabola asociată este tangentă dreptei de ecuație $y = 3$.

15. Aflați valoarea maximă și valoarea minimă ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x$.

16. Fie $N = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$, $x \in \mathbb{R}$ și $M = 6 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Arătați că diferența $N - M$ este constantă.

17. a) Demonstrați că numărul $x = \cos \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9}$ este rațional.

b) Demonstrați că numărul $y = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ este rațional.

c) Demonstrați că numărul $z = 16 \sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 60° \cdot \sin 80°$ este rațional.

18. Arătați că $\sin(\sin x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Clasa a X-a

19. Determinați domeniul maxim de definiție al funcției

$$f(x) = \arcsin \sqrt{3x - x^2}.$$

20. a) Arătați că funcția $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ este inversabilă și determinați inversa acesteia.

b) Arătați că funcția $f : (\frac{\pi}{2}, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ este strict crescătoare.

21 Se consideră funcțiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = (\sin m) \cdot x + 1$, unde m este un parametru real.

a) Determinați $m \in [0, 2\pi)$ pentru care $f_m(1) = 2$.

b) Determinați $m \in (0, \frac{\pi}{2})$ pentru care $f_m([0, 2]) = [1, 2]$.

22. Aflați cu câte zerouri se termină numărul 2022!.

23. Se consideră în plan 10 puncte distincte care determină exact 43 de drepte diferite. Arătați că 3 dintre cele 10 puncte sunt coliniare.

24. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) Câte submulțimi ale mulțimii A au suma elementelor egală cu 8?

b) Câte submulțimi ale mulțimii A au toate elementele numere prime?

c) Câte numere impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu elemente din mulțimea A?