ASUPRA ESTIMĂRII UNUI ȘIR RECURENT

Radu Nicolae Gologan[1)] și Eugen Păltănea[2)]

Abstract. In this paper, we study the asymptotic behavior of the sequence $(x_n)_{n\geqslant 1}$ that is defined by the recurrence relation $x_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} x_k/(n+k)$, for $n\geqslant 1$, with $x_1=1$. In this way, we deepen a problem proposed at the Romanian County Mathematical Olympiad in 2022. Numerical illustrations and comments complete this presentation.

Keywords: rate of convergence, Cauchy-Schwarz inequality, Chebyshev inequality

MSC : 40A05, 26D15, 41A25

În lucrarea de față ne propunem să evidențiem monotonia și comportarea asimptotică a șirurilor $(x_n)_{n\geqslant 1}$ care satisfac relația de recurență

$$x_{n+1}=\frac{x_1}{n+1}+\frac{x_2}{n+2}+\ldots+\frac{x_n}{2n},\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Un astfel de șir este unic determinat de valoarea primului termen. Cazul $x_1=1$ face obiectul Problemei 3 propusă la clasa a XI-a la etapa județeană a olimpiadei naționale de matematică din acest an (OJM-2022). Problema solicită demonstrarea convergenței la 0 a șirului considerat, ghidată de rezultate auxiliare care privesc șirul $(y_n)_{n\geqslant 1}$, definit prin

$$y_n=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n},\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Vom dezvolta acest subiect prin prezentarea unor proprietăți complementare interesante ale șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Apreciem că tehnicile utilizate în demonstrații sunt instructive. Observăm în primul rând că, dacă șirurile $(x_n)_{n\geqslant 1}$ și $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ satisfac recurența (1), cu $x_1=1$ și respectiv $x'_1=a\in\mathbb{R}$,

---

[1)] Profesor univ. dr., Universitatea Politehnica din București

[2)] Conferențiar dr., Universitatea „Transilvania“ din Brașov

atunci $x'_n = ax_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare este suficient să analizăm cazul $x_1 = 1$.

Următoare propoziție grupează câteva rezultate relevante privind comportarea șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ șirul definit prin recurența (1) și condiția $x_1 = 1$. Au loc următoarele prorietăți:*

(i) *șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este pozitiv și strict descrescător;*

(ii) $\dfrac{2(n-1)}{(3n-2)\sqrt{3n-5}} < x_n < \sqrt[4]{\dfrac{3}{4(2n-1)}}$, $\forall\, n \geqslant 3$.

Demonstrație. (i) Inegalitatea $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ rezultă în mod elementar prin inducție. Demonstrăm

$$x_{n+1} < x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \tag{3}$$

pe baza *principiului inducției puternice*. Pentru $n = 1$, avem $x_2 = 1/2 < 1 = x_1$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem $x_{k+1} < x_k$, pentru $k = 1, \ldots, n$. Astfel, $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ iar, pe de altă parte, $\dfrac{n+1}{n+2} < \dfrac{n+2}{n+3} < \ldots < \dfrac{2n}{2n+1}$. Atunci, conform inegalității lui Cebîșev, obținem

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k}{n+1+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{n+k} \cdot \frac{n+k}{n+1+k} \right) + \frac{x_{n+1}}{2(n+1)} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n+k} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n+1+k} \right) + \frac{x_{n+1}}{2(n+1)} \\
&= x_{n+1} \left(1 + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} \right).
\end{aligned}$$

Conform inegalității mediilor, avem

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k}}{n} \geqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (n+1+k)} = \frac{2}{3(n+1)}.$$

Rezultă

$$x_{n+2} \leqslant x_{n+1} \left(1 + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{2}{3(n+1)} \right) = x_{n+1} \left(1 - \frac{1}{6(n+1)} \right) < x_{n+1}.$$

Astfel, monotonia strict descrescătoare a șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este dovedită.

(ii) Demonstrăm inegalitatea stângă. Definim șirul auxiliar $(z_n)_{n\geqslant 1}$ prin

$$z_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{4}$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Conform (i), avem $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Pe de altă parte, $\dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{n+2} + \ldots > \dfrac{1}{2n}$. Din inegalitatea lui Cebîșev și inegalitatea mediilor, rezultă

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k \cdot \frac{1}{n+k}\right) &\geqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&\geqslant z_n \cdot \frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(n+k)} = \frac{2n}{3n+1} z_n.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Atunci $(n+1)z_{n+1} - nz_n = x_{n+1} \geqslant \dfrac{2n}{3n+1} z_n$, de unde obținem $z_{n+1} \geqslant \dfrac{3n}{3n+1} z_n$. Ca urmare, pentru $n > 1$, avem:

$$
z_n = z_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z_{k+1}}{z_k} \geqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k}{3k+1} > \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{3k-2}{3k+1}} = \frac{1}{\sqrt{3n-2}}. \tag{6}
$$

Din inegalitățile (5) și (6) rezultă

$$
x_n \geqslant \frac{2(n-1)}{3n-2} z_{n-1} > \frac{2(n-1)}{(3n-2)\sqrt{3n-5}}, \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3.
$$

Pentru demonstrarea inegalității drepte din (ii), urmăm linia sugerată de enunțul problemei sursă amintite în introducere. Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz, obținem, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}^2 &\leqslant \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right] < \\
&< ny_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)(n+k-1)} = ny_n \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) = \frac{y_n}{2}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Rezultă $(n+1)y_{n+1} - ny_n = x_{n+1}^2 < \dfrac{y_n}{2}$, de unde deducem $y_{n+1} < \dfrac{2n+1}{2n+2} y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, $y_1 = 1$ și, pentru orice $n > 1$,

$$
0 < y_n = y_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{y_{k+1}}{y_k} < \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} < \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{2k+1}{2k+3}} = \sqrt{\frac{3}{2n+1}}. \tag{8}
$$

Din inegalitățile (7) și (8) rezultă

$$
x_n = \sqrt{x_n^2} \leqslant \sqrt{\frac{y_{n-1}}{2}} < \sqrt[4]{\frac{3}{4(2n}}, \ \forall\, n \geqslant 3.
$$

Corolar. *Notăm* $u_n = x_n \sqrt[4]{n}$ *și* $v_n = x_n \sqrt{n}$, *pentru* $n \in \mathbb{N}^*$. *Șirul* $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *este mărginit superior, iar șirul* $(v_n)_{n \geqslant 1}$ *este mărginit inferior de un număr strict pozitiv.*

Demonstrație. Inegalitatea dreaptă din (ii) duce la $u_n < \sqrt[4]{\dfrac{3n}{4(2n-1)}} \leqslant \sqrt[4]{\dfrac{9}{20}}$, $\forall\, n \geqslant 3$. Din $u_1 = 1$ și $u_2 = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$, rezultă $u_n \leqslant 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Apoi, inegalitatea stângă din (ii) implică $v_n > \dfrac{2(n-1)}{3n-2}\sqrt{\dfrac{n}{3n-5}} > \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $\forall\, n \geqslant 3$. Cum $v_1 = 1$ și $v_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, obținem $v_n > \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. □

În cele ce urmează, vom analiza rata de convergență la 0 a șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$. În particular, vom fi în măsură să indicăm natura șirurilor discutate în Corolar. Studiul comportării asimptotice a șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ necesită o serie de rezultate auxiliare.

Lema 1. *Are loc egalitatea*

$$I(r) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^r}{k^r(n+k)} = \frac{1}{r}\int_0^1 \frac{t^{1/r-2}}{1+t^{1/r}}\mathrm{d}t,\ r \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \tag{9}$$

Demonstrație. Fie $r \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. Se verifică cu ușurință identitatea

$$\frac{n^r}{k^r(n+k)} = \frac{k^{-r}}{n^{1-r}} - \left(\frac{k}{n}\right)^{1-r}\frac{1}{n+k},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Pe baza Teoremei Stolz-Cesàro și a limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x)^{1-r}-1} = \dfrac{1}{1-r}$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{-r}}{n^{1-r}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{-r}}{(n+1)^{1-r}-n^{1-r}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{r}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-r}-1} = \frac{1}{1-r}.$$

Apoi, conform convergenței sumelor Riemann la integrala definită, avem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{1-r}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{1-r}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{x^{1-r}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

Deoarece $0 < r \leqslant 1/2$, avem $1/r \geqslant 2$. Cu substituția $x = t^{1/r}$, obținem

$$\int_0^1\frac{x^{1-r}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\int_0^1\frac{t^{2/r-2}}{1+t^{1/r}}\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\int_0^1\left(t^{1/r-2} - \frac{t^{1/r-2}}{1+t^{1/r}}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-r} - \frac{1}{r}\int_0^1\frac{t^{1/r-2}}{1+t^{1/r}}\mathrm{d}t.$$

Rezultă

$$I(r)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^r}{k^r(n+k)}=\frac{1}{1-r}-\left(\frac{1}{1-r}-\frac{1}{r}\int_0^1\frac{t^{1/r-2}}{1+t^{1/r}}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{r}\int_0^1\frac{t^{1/r-2}}{1+t^{1/r}}\mathrm{d}t.$$

Remarca 1. Pe baza unor rezultate elementare privind convergența integralelor improprii (a se vedea, de exemplu, [1]), putem extinde Lema 1 astfel:

$$I(r)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^r}{k^r(n+k)}=\int_0^1\frac{x^{-r}}{1+x}\mathrm{d}x,\ \forall\, r\in[0,1),$$

unde $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{-r}}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1\frac{x^{-r}}{1+x}\mathrm{d}x$, limită care există și este finită.

Lema 2. *Fie* $a>1$ *și* $r<s$. *Atunci* $a^s-a^r>(s-r)a^r\ln a$.

Demonstrație. Se aplică Teorema lui Lagrange funcției crescătoare $f:[r,s]\to\mathbb{R},\ f(x)=a^x$. □

Lema 3. *Funcția* $I:\left(0,\frac{1}{2}\right]\to(0,\infty)$, *dată de* $I(r)=\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^1\frac{t^{1/r-2}}{1+t^{1/r}}\mathrm{d}t$, *are următoarele proprietăți:*

(i) I *este strict crescătoare;*
(ii) I *este continuă;*
(iii) *există un unic punct* $c\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ *astfel ca* $I(c)=1$.

Demonstrație. (i) Fie $0<r<s\leqslant 1/2$ și $n\in\mathbb{N}^*,\ n>1$. Conform Lemei 2, avem

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n^s}{k^s(n+k)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n^r}{k^r(n+k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\left[\left(\frac{n}{k}\right)^s-\left(\frac{n}{k}\right)^r\right]$$
$$>(s-r)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{k}\right)^r\ln\left(\frac{n}{k}\right).$$

Avem $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{1}\right)^r>\dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{n}{2}\right)^r>\ldots>\dfrac{1}{n+n}\left(\dfrac{n}{n}\right)^r$ și $\ln\left(\dfrac{n}{1}\right)>\ln\left(\dfrac{n}{2}\right)>\ldots>\ln\left(\dfrac{n}{n}\right)$. Conform inegalității lui Cebîșev rezultă

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{k}\right)^r\ln\left(\frac{n}{k}\right)>\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{k}\right)^r\right]\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)}{n},$$

unde $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)}{n}=\ln\dfrac{n}{(n!)^{1/n}}$. Astfel

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n^s}{k^s(n+k)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n^r}{k^r(n+k)}>(s-r)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{k}\right)^r\right]\ln\frac{n}{(n!)^{1/n}}.\quad(10)$$

Din formula lui Stirling, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{n}{(n!)^{1/n}} = \ln e = 1$. Conform Lemei 1, prin trecere la limită în inegalitatea (10), obținem $I(s) - I(r) \geqslant (s-r)I(r) > 0$, deci $I(r) < I(s)$.

(ii) Este suficient să demonstrăm că funcția $J : \left(0, \frac{1}{2}\right] \to (0,\infty),\ J(r) = rI(r) = \int_0^1 \frac{t^{1/r-2}}{1+t^{1/r}}\mathrm{d}t$ este continuă. Considerăm $0 < r < s \leqslant 1/2$. Conform (i) avem $J(r) < J(s)$. De asemenea, $1/r - 2 > 1/s - 2 \geqslant 0$ implică $t^{1/s-2} - t^{1/r-2} > 0,\ \forall\, t \in (0,1)$. Rezultă

$$0 < J(s) - J(r) = \int_0^1 \left(\frac{t^{1/s-2}}{1+t^{1/s}} - \frac{t^{1/r-2}}{1+t^{1/r}}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{1/s-2} - t^{1/r-2}}{\left(1+t^{1/s}\right)\left(1+t^{1/r}\right)}\mathrm{d}t <$$

$$< \int_0^1 \left(t^{1/s-2} - t^{1/r-2}\right)\mathrm{d}t = \frac{s}{1-s} - \frac{r}{1-r} = \frac{s-r}{(1-s)(1-r)} \leqslant 4(s-r).$$

Deducem că J este o funcție Lipschiz, deci este continuă. Atunci I este o funcție continuă.

(iii) Prin integrarea numerică oferită de softul SCILAB, obținem următoarea estimare, cu eroarea mai mică decât 10^{-6}: $I(1/4) = 4\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t \approx 0.974991$. Deci $I(1/4) < 1$. Apoi $I(1/2) = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{2} > 1$. Cum funcția I este strict crescătoare și continuă, rezultă că există un unic punct $c \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ astfel ca $I(c) = 1$. □

Remarca 2. Indicăm aproximarea rădăcinii unice c a ecuației $I(r) = 1,\ 0 < r \leqslant \frac{1}{2}$:

$$c \approx 0{,}2658784 \quad (\text{SCILAB}).$$

Suntem în măsură să formulăm acum principalul rezultat al acestui studiu.

Teoremă. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ șirul definit prin recurența* (1) *și condiția $x_1 = 1$, iar $c \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ punctul asigurat de Lema 3. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} (n^r x_n) = \begin{cases} 0, & r < c \\ \infty, & r > c \end{cases},\ \text{unde } r \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. 1. Fie $r < c$. Evident, dacă $r \leqslant 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^r x_n = 0$. Presupunem $r \in (0,c)$. Conform Lemei 3, avem $I(r) < I(c) = 1$. Notăm $u_n = n^r x_n,\ n \in \mathbb{N}^*$. Fie

$$b = \limsup_{n\to\infty} u_n = \inf\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*} \sup\nolimits_{k\geqslant n} u_k \in [0,\infty) \cup \{\infty\}.$$

Arătăm că b este finit. Din inegalitatea $I(r) < 1$ și Lema 1 rezultă că există $q \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $(n+1)^r \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r(n+k)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^r \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n^r}{k^r(n+k)} < 1,\ \forall\, n \geqslant$

q. Fie $M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} u_k,\ n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n \geqslant q$, avem

$$\begin{aligned} u_{n+1} = (n+1)^r x_{n+1} = (n+1)^r \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n+k} &= (n+1)^r \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k^r(n+k)} \\ &\leqslant M_n (n+1)^r \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r(n+k)} < M_n. \end{aligned}$$

Rezultă $M_{n+1} = M_n$. Astfel, $M_n = M_q,\ \forall\, n \geqslant q$, deci $u_n \leqslant M_q,\ \forall\, n \geqslant q$. Rezultă $b \leqslant M_q$, deci b este finit. Presupunem prin reducere la absurd $b > 0$. Fie $\varepsilon \in (0,1)$. Există $n_0 > 1$ astfel ca $\sup_{k\geqslant n_0} u_k < b+\varepsilon$. Rezultă $u_k < b + \varepsilon,\ \forall\, k \geqslant n_0$. Atunci, pentru $n > n_0$, obținem

$$u_{n+1} = (n+1)^r \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k^r(n+k)} < (b+\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^r}{k^r(n+k)} + p_n,$$

unde $p_n = (n+1)^r \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{u_k-(b+\varepsilon)}{k^r(n+k)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Deducem că există $n_1 > n_0$ astfel ca $p_n < \varepsilon,\ \forall\, n \geqslant n_1$, de unde

$$u_{n+1} < (b+\varepsilon) \left(\frac{n+1}{n}\right)^r \sum_{k=1}^{n} \frac{n^r}{k^r(n+k)} + \varepsilon,\ \forall\, n \geqslant n_1. \tag{11}$$

Conform Lemei 1, obținem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^r \sum_{k=1}^{n} \frac{n^r}{k^r(n+k)} = I(r)$. Atunci există $n_2 \geqslant n_1$ astfel ca $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^r \sum_{k=1}^{n} \frac{n^r}{k^r(n+k)} < I(r)+\varepsilon,\ \forall\, n \geqslant n_2$. Din (11) deducem inegalitatea

$$u_{n+1} < (b+\varepsilon)\left(I(r)+\varepsilon\right) + \varepsilon < bI(r) + \varepsilon(b+I(r)+2),\ \forall\, n \geqslant n_2.$$

Notăm $d = b+I(r)+2$. Rezultă $b = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant bI(r)+\varepsilon d$. Cum $I(r) \in (0,1)$ și $b > 0$, putem alege $\varepsilon < \dfrac{b(1-I(r))}{d}$. Atunci $b > bI + \varepsilon d$. Contradicție. Rezultă $b = 0$. Din $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ și $u_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} (n^r x_n) = 0$.

2. Fie $r > c$. Analizăm cazul $r \in (c, 1/2]$. Din Lema 3, rezultă $I(r) > I(c) = 1$. Atunci, conform Lemei 1, există $q \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^r}{k^r(n+k)} > 1,\ \forall\, n \geqslant q$. Notăm $u_n = n^r x_n,\ n \in \mathbb{N}^*$. Fie

$$a = \liminf_{n\to\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \inf_{k\geqslant n} u_k \in [0,\infty) \cup \{\infty\}.$$

Demonstrăm $a > 0$. Definim şirul $m_n = \min\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, format din numere strict pozitive. Pentru $n \geqslant q$, avem

$$u_{n+1} = (n+1)^r x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^r x_k}{n+k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{n^r u_k}{k^r(n+k)} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n^r m_n}{k^r(n+k)} > m_n.$$

Rezultă $m_{n+1} = m_n$. Astfel $m_n = m_q$, $\forall\, n \geqslant q$. Atunci $u_n \geqslant m_q$, $\forall\, n \geqslant q$. Prin urmare, $a \geqslant m_q > 0$. Presupunem, prin reducere la absurd, $a < \infty$. Fie $\varepsilon \in (0,1)$, cu $\varepsilon < a$. Atunci există $n_0 > 1$ astfel ca $\inf_{k \geqslant n_0} u_k > a - \varepsilon$. Atunci $u_k > a - \varepsilon$, $\forall\, k \geqslant n_0$. Ca urmare, pentru $n > n_0$, avem

$$u_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} \frac{n^r u_k}{k^r(n+k)} > (a-\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} \frac{n^r}{k^r(n+k)} + r_n,$$

unde $r_n = n^r \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{u_k - (a-\varepsilon)}{k^r(n+k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Atunci există $n_1 > n_0$ astfel ca $r_n > -\varepsilon$, $\forall\, n \geqslant n_1$, deci

$$u_{n+1} > (a-\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} \frac{n^r}{k^r(n+k)} - \varepsilon, \ \forall\, n \geqslant n_1. \tag{12}$$

Conform Lemei 1, există $n_2 \geqslant n_1$ astfel ca $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^r}{k^r(n+k)} > I(r) - \varepsilon$, $\forall\, n \geqslant n_2$. Din (12) deducem inegalitatea $u_{n+1} > (a-\varepsilon)\,(I(r)-\varepsilon) - \varepsilon > aI(r) - \varepsilon\,(a + I(r) + 1)$, $\forall\, n \geqslant n_2$. Notăm $c = a + I(r) + 1$. Rezultă $a = \liminf\limits_{n\to\infty} u_n \geqslant aI(r) - \varepsilon c$. Dar $0 < \dfrac{a(I(r)-1)}{c} < a$. Alegând $\varepsilon \in (0,1)$, astfel ca $\varepsilon < \dfrac{a(I(r)-1)}{c}$, obţinem $a < aI(r) - \varepsilon c$. Contradicţie. Prin urmare $a = \infty$. Din $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (n^r x_n) = \infty$.

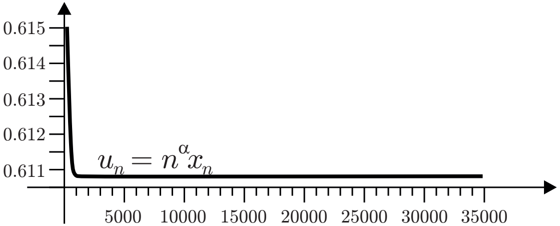
Fie $r > \dfrac{1}{2}$. Alegem $s \in \left(c, \dfrac{1}{2}\right]$, arbitrar. Atunci
$\lim\limits_{n\to\infty} (n^r x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (n^s x_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n^{r-s} = \infty.$ □

Comentarii.

1. Din teorema de mai sus rezultă, în particular, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt{n} = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt[4]{n} = 0$. Aceste limite completează informaţiile despre cele două şiruri prezentate în Propoziţie şi Corolar.

2. Datele numerice (a se vedea figura de mai jos) ne îndreptăţesc să formulăm următoarea conjectură:

şirul $u_n = n^c x_n$, $n \geqslant 1$, *este convergent, cu* $\lim\limits_{n\to\infty} (n^c x_n) = \alpha \in (0,1)$ $(\alpha \approx 0,61)$, *adică* $x_n \sim \frac{\alpha}{n^c}$, $n \to \infty$.



Bibliografie

[1] M. Nicolescu, N. Dinculeanu și S. Marcus, *Analiză matematică, Vol. I-II, EDP Bucuresti, 1971.*