GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXVII nr. 3 **martie 2022**

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

O GENERALIZARE A PROBLEMEI LUI LANGLEY

Cantemir Iliescu[1)]

Abstract. This note extends *Langley's adventitious angles problem* to a class of more general triangles

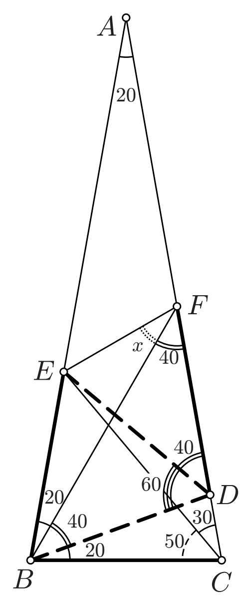
Keywords: isosceles triangle, adventitious angles

MSC : 51M04

Nota de față se adresează în principal elevilor de clasa a 6-a, dar nu numai ....

În [1] este prezentată o problemă deosebit de interesantă cu următorul enunț.

Se consideră triunghiul isoscel ABC cu unghiul din vârf A de măsură $20°$ și punctele E, F pe laturile AB, respectiv AC astfel încât măsura unghiului ACE este egală cu $30°$ și măsura unghiului ABF este egală cu $20°$. Aflați măsura unghiului EFB.



Problema este cunoscută sub numele *Langley's adventitious angles*[2)].

Una dintre primele soluții găsite presupune construcția punctului D pe latura AC astfel încât măsura unghiului DBC este egală cu $20°$ (vezi figura alăturată).

Triunghiul BDC este isoscel, deoarece avem $\sphericalangle BCD = 80°$ și $\sphericalangle CBD = 20°$, deci $\sphericalangle CDB = 80°$.

[1)] Profesor, Pitești.

[2)] Edward Mann Langley (22 ianuarie 1851 – 9 iunie 1933) a fost un matematician britanic, fondator al revistei „The Mathematical Gazette”

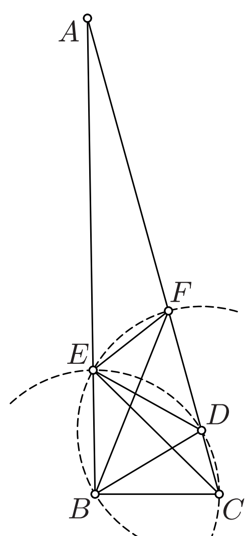
De asemenea, triunghiul BCE este isoscel, deoarece $\sphericalangle CBE = 80°$ şi $\sphericalangle BCE = 50°$, deci $\sphericalangle BEC = 50°$.

Rezultă astfel $BC = BD = BE$. Deducem că triunghiul BED este echilateral (isoscel cu $\sphericalangle DBE = 60°$), deci $ED = BD = BF$, iar triunghiul BDF are măsurile unghiurilor egale cu $100°$, $40°$, $40°$, deci este şi el isoscel şi rezultă $FD = ED$.

Astfel şi triunghiul DEF este isoscel, cu unghiurile $40°$, $40° + x$, $40° + x$, unde am notat cu x măsura unghiului EFB. Deoarece suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este $180°$, obţinem $x = 30°$. □

În continuare se poate pune problema: există un alt tip de triunghi în care se poate aplica acelaşi gen de raţionament? După construcţia de mai jos, răspunsul este afirmativ.

Se consideră triunghiul ABC cu proprietatea $\sphericalangle ACB = 60° + \sphericalangle BAC$ şi punctele E, F pe laturile AB, respectiv AC astfel încât $\sphericalangle ACE = 30°$ şi $\sphericalangle ABF = \frac{1}{4}\sphericalangle ABC$. Atunci măsura unghiului EFB este egală cu $30°$.



Soluţia este identică cu cea a problemei precedente (luăm punctul D pe AC astfel încât triunghiul BCD să fie isoscel, cu vârful în B), însă vom detalia ideea care duce la formularea enunţului.

Construim un segment BC pe care îl luăm în compas. Cu vârful compasului în B trasăm un arc de cerc pe care alegem punctul D cu condiţia $60° < \sphericalangle DCB < 90°$. Măsurăm cu raportorul un unghi DBE de $60°$, cu punctul E pe arcul de cerc, de aceeaşi parte cu D faţă de BC. Prelungim CD şi BE până se întâlnesc în punctul A. Cu vârful compasului în D şi lungimea DE, trasăm un arc de cerc care taie AC în punctul F.

De ce impunem $60° < \sphericalangle DCB < 90°$? Deoarece avem $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC + 60° > 60°$ şi, pentru ca să existe triunghiul BCD, $\sphericalangle BCD + \sphericalangle BDC < 180°$, adică $2 \cdot \sphericalangle BCD < 180°$.

Notăm măsura unghiului ACB cu a (vezi figura). Triunghiul BDC este isoscel, deci măsura unghiului DBC este $180° - 2a$ şi, cum unghiul DBE are măsura de $60°$, rezultă că măsura unghiului ABC este $240° - 2a$. De aici se deduce relaţia $\sphericalangle ABC = 240° - 2 \cdot \sphericalangle ACB$, echivalentă cu $\sphericalangle ACB = 60° + \sphericalangle BAC$. Continuând calculele cu unghiuri, obţinem $\sphericalangle ABF = 60° - \frac{a}{2} = \frac{\sphericalangle ABC}{4}$, $\sphericalangle ACE = 30°$. □

Verificaţi raţionamentul de mai sus rezolvând următoarea problemă.

Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în B, cu măsura unghiului A egală cu 15°, și punctele E, F pe laturile AB, respectiv AC astfel încât măsura unghiului ACE este egală cu 30° și măsura unghiului ABF este egală cu $22^\circ 30'$. Aflați măsura unghiului EFB.

Webografie[1)]

[1] https://www.youtube.com/watch?v=HQc-54hQ8kw&t=10s

[1] **Nota redacției.** Se mai pot consulta, de exemplu, și

[2] M. Pimsner, S. Popa, *Probleme de geometrie elementară*, pag. 9, Editura Didactică și Pedagogică, 1979

[3] M.E. Panaitopol, L. Panaitopol, *Probleme de geometrie plană - soluții trigonometrice*, pag. 32, Editura Gil, 2007