Clasa a IX-a

13. a) Putem împărţi în două grupe primele 30 de numere naturale nenule, astfel încât prima grupă să conţină 20 de numere, iar suma elementelor din cele două grupe să fie aceeaşi ?

b) Numerele naturale $1, 2, 3, \ldots, 20$ sunt scrise toate pe 20 de bilete diferite. Determinaţi numărul minim de bilete care trebuie alese la întâmplare, pentru a fi siguri că produsul numerelor înscrise pe ele este multiplu de 4.

14. Determinaţi triunghiurile dreptunghice în care lungimile laturilor formează o progresie aritmetică.

15. Arătaţi că numerele $\sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}$ nu pot fi termeni ai unei progresii aritmetice.

16. Într-un pătrat se înscrie un cerc, apoi în cerc se înscrie un pătrat, în care se înscrie un cerc, procedeul continuând. Arătaţi că:

a) perimetrele pătratelor formează o progresie geometrică şi determinaţi raţia acesteia;

b) ariile pătratelor formează o progresie geometrică şi determinaţi raţia acesteia.

17. Mulţimea numerelor naturale impare se grupează în submulţimi astfel: $A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{5, 7, 9\}$, $A_3 = \{11, 13, 15, 17\}$, $\ldots$, mulţimea A_n conţinând $n+1$ elemente, numere naturale impare consecutive.

a) Calculaţi suma elementelor mulţimii A_{15}.

b) Determinaţi $k \in \mathbb{N}$ pentru care $2009 \in A_k$.

18. Fie a, b, c trei numere reale cu suma nenulă. Arătaţi că ele sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă numerele $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$, $z = c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică.

Clasa a X-a

19. Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ o soluţie a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$. Calculaţi $\alpha^4 + \dfrac{1}{\alpha^4}$.

20. Reprezentaţi geometric mulţimile:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}z \in [-1, 1], |z - \mathrm{i}| \leq 2\}$;

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg z \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}), \mathrm{Im}z \in [2, 4]\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z-2+i}{z+1} \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}z > -2\}$;

d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3\mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}|, \arg(z) > \frac{\pi}{4}\}$.

21. a) Determinaţi valorile parametrului real m pentru care numărul complex $z = (5m^2 - 4m - 1) + (m^2 - 1)\mathrm{i}$ este pur imaginar.

b) Determinaţi numărul complex z care verifică relaţia $2z + z \cdot \overline{z} = 4 + 2\mathrm{i}$.

22. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$;

b) $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$

23. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\frac{1}{2}\log_5(x+5)+\log_5\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\log_5(2x+1)$;

b) $5\log_{\frac{x}{3}}x+\log_{\frac{3}{x}}x^3+8\log_{3x^2}x^2=2$.

24. a) Arătaţi că $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x\in(-1,1)$.

b) Calculaţi $\operatorname{tg}(\arcsin\dfrac{3}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13})$.