Clasa a IX-a

13. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o progresie aritmetică cu primul termen şi raţia pozitive. Arătaţi că $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{a_{k-1}\cdot a_{k+1}}}\geq n$.

14. Fie sistemul $\begin{cases}|x-y|=a+1\\ x\cdot y=-a\end{cases}$, unde $a\in(0,\infty)$.

---

[1]) La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

a) Rezolvaţi sistemul.

b) Determinaţi $a \in (0, \infty)$ astfel încât $x^2 + y^2 < 2$, pentru orice soluţie (x, y) a sistemului.

15. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este periodică. Există perioada principală?

16. Fie H, O ortocentrul şi centrul cercului circumscris unui triunghi ABC. Arătaţi că:

a) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2 \cdot \overrightarrow{HO}$. b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) Dacă A', B', C' sunt punctele diametral opuse lui A, B, C, în cercul circumscris triunghiului ABC, atunci $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HC'} = 2 \cdot \overrightarrow{HO}$.

d) Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$ şi H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC. Arătaţi că patrulaterele $ABCD$ şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente.

17. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC, iar A', B', C' simetricele lui H faţă de mijloacele laturilor BC, CA, AB. Arătaţi că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

18. Arătaţi că cercul lui Euler al unui triunghi dreptunghic trece prin vârful unghiului drept şi este tangent în acest punct cercului circumscris triunghiului.

Clasa a X-a

19. Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii.

a) Arătaţi că dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.

b) Arătaţi că dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.

c) Arătaţi că dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$este surjectivă.

d) Arătaţi că dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

20. Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii, unde $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că, dacă f este periodică, atunci $g \circ f$ este periodică.

b) Arătaţi că, dacă f este pară, atunci $g \circ f$ este pară.

c) Arătaţi că dacă f şi g sunt impare, atunci $g \circ f$ este impară.

d) Arătaţi că dacă f este impară şi g este pară, atunci $g \circ f$ este pară.

21. Arătaţi că nu există funcţii care să verifice relaţia $f(x) + f(1 - x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

22. a) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 2]$, $f(x) = -x^2 + 2$ este corect definită, este surjectivă, dar nu este injectivă.

b) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 3| + |x - 3|$ nu este surjectivă şi nu este injectivă.

23. Fie $a, b, c, d \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, astfel încât $ab = cd$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + b^x + c^{-x} + d^{-x}$.

a) Determinaţi minimul funcţiei f.

b) Rezolvaţi ecuaţia $4^x + 5^x + 2^{-x} + 10^{-x} = 4$.

24. Fie $a > 1$ şi funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathrm{R}$, $f(x) = a^x + a^{\frac{1}{x}}$.

a) Studiaţi monotonia funcţiei f.

b) Rezolvaţi ecuaţia $4^x + 4^{\frac{1}{x}} = 18$.