# O PROPRIETATE REMARCABILĂ A ORTOCENTRULUI UNUI TRIUNGHI

Ion Pătrașcu[1)]

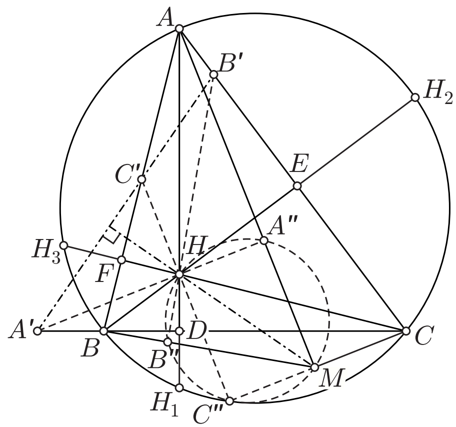
**Abstract**. In this article we prove a property of the orthocenter of a triangle, then we state and prove its converse.

**Keywords:** orthocenter, pole, inversion, collinearity, power, perpendicularity.

**MSC :** 51M04

**Propoziția 1.** *Perpendicularele duse din ortocentrul unui triunghi pe trei ceviene concurente în triunghi, intersectează laturile triunghiului în trei puncte coliniare. Dreapta acestor puncte este perpendiculară pe dreapta determinată de ortocentrul triunghiului și de punctul de concurență a cevienelor.*

*Demonstrație.* Fie $H$ ortocentrul triunghiului $ABC$ și $D$, $E$, $F$ picioarele înălțimilor.




[1)] Profesor, Craiova.

Notăm cu $M$ intersecția celor trei ceviene din enunț și cu $A'$, $B'$, $C'$ intersecțiile perpendicularelor duse din $H$ pe $AM$, $BM$, respectiv $CM$ cu $BC$, $CA$ respectiv $AB$. Trebuie să demonstrăm coliniaritatea punctelor $A'$, $B'$, $C'$ și că $MH \perp A'B'$. Proiecțiile lui $H$ pe $AM$, $BM$, $CM$ le notăm cu $A''$, $B''$, $C''$ și mai notăm cu $H_1$, $H_2$, $H_3$ simetricele lui $H$ față de laturile $BC$, $CA$ și $AB$. După cum se știe, aceste puncte aparțin cercului circumscris triunghiului. Considerând puterea punctului $H$ fată de cercul circumscris obținem că $HA \cdot HH_1 = HB \cdot HH_2 = HC \cdot HH_3$, iar de aici rezultă

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF. \tag{1}$$

Vom nota cu $k$ valoarea comună a produselor din relația (1).

Observăm că patrulaterul $AA''DA'$ este inscriptibil, prin urmare

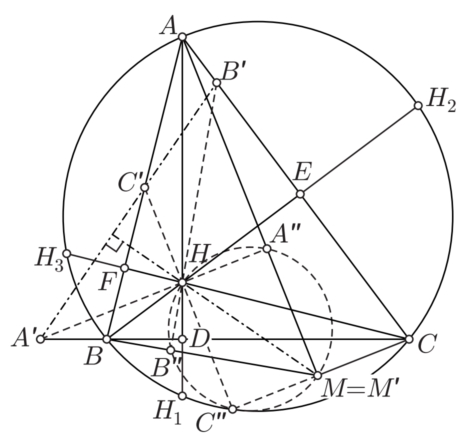
$$HA \cdot HD = HA'' \cdot HA' = k. \qquad (2).$$

Analog găsim că

$$HB'' \cdot HB' = HC'' \cdot HC' = k. \tag{3}$$

Considerând inversiunea de pol $H$ și de putere $k$, relațiile (2) și (3) arată că punctul $A'$ este inversul lui $A''$, $B'$ este inversul lui $B''$ și punctul $C'$ este inversul lui $C''$. Deoarece punctele $A''$, $B''$, $C''$ aparțin cercului de diametru $HM$, acest cerc se transformă prin inversiunea considerată într-o dreaptă, adică în dreapta căreia îi aparțin punctele $A'$, $B'$, $C'$. Tot din proprietatea inversiunii care afirmă că dreapta imagine a unui cerc care trece prin polul inversiunii este perpendiculară pe diametrul cercului care trece prin pol, rezultă că $MH \perp A'B'$.

**Propoziția 2.** (Reciproca propoziției 1) *Fie $ABC$ un triunghi, $H$ ortocentrul său, $A'-B'-C'$ o transversală a sa care nu trece prin $H$ ($A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$) și $A''$, $B''$, $C''$ proiecțiile vârfurilor $A$, $B$, $C$ respectiv pe $HA'$, $HB'$, $HC'$. Atunci cevienele $AA''$, $BB''$, $CC''$ sunt concurente într-un punct $M$, iar dreapta $MH$ este perpendiculară pe transversală.*



*Demonstrație.* Păstrând notațiile $D$, $E$, $F$ pentru picioarele înălțimilor triunghiului $ABC$, patrulaterul $AA''DA'$ este inscriptibil și rezultă că $HA \cdot HD = HA'' \cdot HA'$ (puterea punctului $H$ față de cercul circumscris patrulaterului). Deoarece $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$ (consecință a puterii ortocentrului $H$ fată de cercul circumscris triunghiului și a proprietății de simetrie a ortocentrului), notând cu $k$ valoarea comună a acestor produse obținem că

$$HA'' \cdot HA' = HB'' \cdot HB' = HC'' \cdot HC' = k. \tag{4}$$

Considerând inversiunea de pol ortocentrul $H$ și de putere $k$, relația (4) arată că perechile de puncte $(A'', A')$, $(B'', B')$, $(C'', C')$ sunt omoloage. Prin această inversiune, transversala $A' - B' - C'$ este transformată în cercul care trece prin $H$ și căruia îi aparțin punctele $A''$, $B''$, $C''$. Notând $\{M\} = AA'' \cap BB''$, patrulaterul $MA''HB''$, având unghiurile din $A''$ și din $B''$ drepte, este inscriptibil și rezultă că punctul $M$ este diametral opusul lui $H$ în cercul circumscris triunghiului $A''B''C''$.

Notăm cu $M'$ punctul în care ceviana $CC''$ retaie cercul circumscris triunghiului $A''B''C''$. Din $\sphericalangle HC''M' = 90^\circ$ rezultă că $M'$ este simetricul lui $H$ fată de centrul cercului circumscris triunghiului $A''B''C''$, deci $M' = M$ și concurența cevienelor din enunț este demonstrată.

Proprietatea inversiunii potrivit căreia imaginea unei drepte care nu trece prin polul inversiunii este un cerc care trece prin polul inversiunii și al cărui diametru cu extremitatea polul este perpendicular pe aceea dreaptă conduce la concluzia că dreapta $MH$ este perpendiculară pe transversală.

## Bibliografie


[1] C. Coșniță, *Teoreme și probleme alese de matematici – pentru uzul elevilor școlilor medii și al cercurilor de matematici*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1958.

[2] I. Pătrașcu, *A háromszög nevezetes pontjairól Ceva - féle egyenesre bocsátott merőlegesekről*, Matematikai Lapok 6-7/1990.