Clasa a IX-a

13. Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare element al mulţimii
$$M = \left\{n + [\frac{2022}{n}] \middle| n \in \{1, 2, \ldots, 2022\}\right\}.$$

14. a) Arătaţi că, dacă numerele reale x, y au proprietatea că $|x - y| \leq \frac{1}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $x = y$.

b) Arătaţi că, dacă numerele reale a, b, c, d au proprietatea că $[na] + [nb] = [nc] + [nd]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a + b = c + d$.

15. Rezolvaţi ecuaţia $\frac{6x^2 + 7x}{6} + \frac{42}{6x^2 + 7x + 18} = 5$.

16. a) Arătaţi că în orice triunghi ABC avem relaţia lui Sylvester:
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

b) Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru O. Dacă H_1 şi H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD, respectiv ABC, arătaţi că $\overrightarrow{BH_2} = \overrightarrow{DH_1}$.

17. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului.

18. Fie ABC un triunghi de laturi a, b, c, G centrul său de greutate şi I centrul cercului înscris. Arătaţi că
$$3(a \cdot \overrightarrow{AG} + b \cdot \overrightarrow{BG} + c \cdot \overrightarrow{CG}) = (a + b + c) \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}).$$

Clasa a X-a

19. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţiile:

a) $z \cdot \bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 13 + 18i$; b) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$; c) $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1|$.

20. Ştiind că z este un număr complex cu modulul egal cu 1, determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $\left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = 1$.

21. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_k| = 1$, $k \in \{1, 2, 3\}$ şi $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Arătaţi că $\left|\dfrac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 1$.

22. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon \in \mathbb{C}$ o soluţie a ecuaţiei $z^2 + z + 1 = 0$.

a) Arătaţi că $a^3 + b^3 = (a + b)(a + b\varepsilon)(a + b\varepsilon^2)$.

b) Arătaţi că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon)$.

c) Calculaţi modulul numărului $P = \prod\limits_{k=1}^{2022} (1 + \varepsilon^k)$.

23. Arătaţi că, dacă z este o rădăcină de ordin 7 a unităţii, atunci numărul $x = \dfrac{z}{1 + z^2} + \dfrac{z^2}{1 + z^4} + \dfrac{z^3}{1 + z^6}$ este întreg.

24. Determinaţi valorile parametrului real nenul m pentru care ecuaţia $z^3 - i(z^2 - 1) - mz = 0$ are cel puţin o soluţie reală.