PENTRU CERCURILE DE ELEVI

PORNIND DE LA O INEGALITATE DATĂ LA SELECȚIA PENTRU OBMJ 2022

George-Ioan Stoica[1)]

La al treilea baraj de selecție pentru OBMJ 2022 s-a dat următoarea problemă.

Fie $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ numere reale cu proprietatea că

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = -3$$

și

$$a+b+c+d = 6.$$

Demonstrați că $d < 0{,}36$.

În această lecție ne propunem să arătăm că o problemă poate declanșa întrebări care conduc la alte probleme, mai profunde. Ca atare, ne propunem să găsim, în condițiile din enunț, cea mai mare valoare posibilă a variabilei d, nu numai să demonstrăm că 0,36 este un majorant.

Fie $x = a-b,\ y = b-c,\ z = c-d$. Deoarece $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ rezultă că $x,\ y,\ z \geqslant 0$. Totodată, $d-a = (d-c)+(c-b)+(b-a) = -(x+y+z)$, deci relația $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = -3$ se scrie echivalent

$$xyz(x+y+z) = 3.$$

Deoarece $c = d+z$, $b = c+y = d+z+y$ și $a = b+x = d+z+y+x$, avem $6 = a+b+c+d = 4d+3z+2y+x$, sau

$$d = \frac{6-(3z+2y+x)}{4}.$$

Deci, pentru a afla maximul lui d este suficient să găsim minimul expresiei $3z+2y+x$.

Cu inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică obținem

$$3z+2y+x = 2z+2y+z+x = 2(z+y)+(z+x) \geqslant 2\sqrt{2(z+y)(z+x)},$$

[1)]Elev, Colegiul Național „C. Negruzzi" Iași

cu egalitate dacă și numai dacă $2(z+y) = z+x$.

În continuare, folosind din nou inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică, observăm că

$$(z+y)(z+x) = z(x+y+z) + xy \geqslant 2\sqrt{z(x+y+z)xy} = 2\sqrt{3},$$

cu egalitate dacă și numai dacă dacă $z(x+y+z) = xy$, sau $z(x+y+z) = xy = \sqrt{3}$ (căci $xyz(x+y+z) = 3$).

Combinând cele două inegalități anterioare, obținem

$$3z + 2y + x \geqslant 2\sqrt{2(z+y)(z+x)} \geqslant 2\sqrt{2 \cdot 2\sqrt{3}} = 4\sqrt[4]{3}.$$

Pentru a putea afirma că maximul expresiei $3z + 2y + x$ este $4\sqrt[4]{3}$, rămâne să mai arătăm că există cel puțin trei numere reale pozitive care verifică simultan egalitățile $2(z+y) = z+x$ și $z(x+y+z) = xy = \sqrt{3}$. $\quad(^*)$

Din prima egalitate, deducem că $x = 2y + z$. Înlocuind x în ultimele două relații, rezultă că $(z+2y)y = \sqrt{3}$, respectiv $z(3y+2z) = \sqrt{3}$ de unde, prin scădere, rezultă că $z^2 + zy - y^2 = 0$ sau $(\frac{z}{y})^2 + (\frac{z}{y}) - 1 = 0$, deci $\frac{z}{y} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Înlocuind pe $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}y$ în egalitatea $(z+2y)y = \sqrt{3}$, deducem că $\frac{3+\sqrt{5}}{2}y^2 = \sqrt{3}$, deci $y = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}}$. Prin urmare, egalitățile $(^*)$ sunt verificate pentru $y = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}}$, $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}}$ și $x = z + 2y = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}}$.

Astfel am demonstrat că valoarea minimă a expresiei $3z + 2y + x$ este $4\sqrt[4]{3}$, deci valoarea maximă a variabilei d este $\frac{6-4\sqrt[4]{3}}{4} = \frac{3}{2} - \sqrt[4]{3}$.

Observăm că $\frac{3}{2} - \sqrt[4]{3} \simeq 0{,}19 < 0{,}36$, ceea ce înseamnă că am întărit (lucru care era de așteptat!) concluzia problemei considerate.