Clasa a IX-a

13. Fie triunghiul ABC cu $AB = 6$, $AC = 8$, G centrul de greutate al triunghiului şi punctul D astfel încât $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{CB}$.

a) Demonstraţi că $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

b) Demonstraţi că $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$.

14. Fie punctele $A(1,2), B(0,3), C(-1,4)$ şi $D(-1,2)$.

a) Arătaţi că punctele A, B, C sunt coliniare.

b) Arătaţi că triunghiul ADC este dreptunghic isoscel.

15. Arătaţi că, dacă $(AD$ şi $(AE$ împart unghiul A al unui triunghi ABC în trei unghiuri congruente, unde $D, E \in (BC)$, atunci segmentele (BD), (DE) şi (EC) nu pot fi toate congruente.

16. Pe latura (BC) a triunghiului ABC se consideră un punct M astfel încât $3 \cdot BM = MC$, iar pe latura (AC) se consideră un punct N astfel încât $k \cdot AN = NC$. Determinaţi k pentru care B, N şi mijlocul segmentului AM sunt coliniare.

17. Negaţi următoarea propoziţie: „oricare ar fi n un număr natural impar, $(n^5 - n) \vdots 240$”. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei obţinute.

18. Considerăm suma $S = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$, unde $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Restrângeţi expresia $(1 - x)S$.

b) Arătaţi că, dacă n este număr natural nenul, atunci

$$1 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + n\left(1 + \frac{1}{n}v\right)^{n-1} = n^2.$$

Clasa a X-a

19. a) Studiaţi injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(x) = \begin{cases} -2x + 8 & , x < 1 \\ -x^2 + 2x + 4 & , x \geqslant 1 \end{cases}.$$

b) Arătaţi că funcţia $f : (0, \infty) \to (1, 3)$, $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ este corect definită, apoi arătaţi că este bijectivă şi determinaţi inversa ei.

20. Fie numerele complexe $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}\,,\ z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

a) Scrieţi z_1, z_2 în forma trigonometrică şi calculaţi, folosind forma trigonometrică, numerele $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^{12}$, precizând modulul şi argumentul redus pentru fiecare dintre ele.

b) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $z^6 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

21. Scrieţi sub formă trigonometrică numărul $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})^{12}}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{16}}$.

22. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $z^6 - 4z^3 + 3 = 0$.

23. Demonstraţi că $8\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1$.

24. Determinaţi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\cdot(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x)\cdot(\cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x) = \mathrm{i}.$$