GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXVII nr.1 **ianuarie 2022**

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

UN REPREZENTANT SPECIAL AL UNEI CLASE DE TRIUNGHIURI REMARCABILE

Daniel Văcărețu[1)]

Abstract. In the Mathematical Note „*A class of remarkable triangles*" [6] Traian Lalescu has defined the notion of S triangles as a pair of triangles, inscribed in the same circle, which has some specific properties. The relation S between two such triangles is an equivalence relation. In this paper, we describe a special representative of an equivalence class, namely an equilateral triangle.

Keywords: Wallace-Simson line, S triangles, Boutin points, equilateral derivative of a triangle, mean triangle, nine point circle.

MSC : 51M04, 51M15, 51N20

1. Triunghiuri S

În anul 1915 Traian Lalescu a definit triunghiurile S și a demonstrat câteva dintre proprietățile lor legate de dreapta Wallace-Simson și ortopol [6], [7].

Definiție. Fie ABC un triunghi și două puncte oarecare B', C' situate pe cercul circumscris triunghiului ABC. Fie A' punctul de pe același cerc a cărui dreapta Wallace-Simson $\Delta_{A'}$ e perpendiculară pe $B'C'$. Vom zice că triunghiul $A'B'C'$ este un triunghi S față de triunghiul ABC.

Această definiție este echivalentă cu proprietatea că suma algebrică a arcelor $\widehat{AA'}$, $\widehat{BB'}$ și $\widehat{CC'}$, luate în același sens, este egală cu zero, altfel spus

$$\mathrm{m}(\widehat{AA'}) + \mathrm{m}(\widehat{BB'}) + \mathrm{m}(\widehat{CC'}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

și implică următoarele proprietăți:

i) Dreptele Wallace-Simson $\Delta_{B'}$ și $\Delta_{C'}$ ale punctelor B' și C' în raport cu triunghiul ABC sunt perpendiculare pe $C'A'$ respectiv $A'B'$.

[1)] Lector dr., Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea „Babeș-Bolyai", Cluj-Napoca

ii) Dreptele Wallace-Simson Δ_A, Δ_B, Δ_C ale punctelor A, B respectiv C în raport cu triunghiul $A'B'C'$ sunt perpendiculare pe BC, CA respectiv AB.

iii) Cele șase drepte Wallace-Simson Δ_A, Δ_B, Δ_C, $\Delta_{A'}$, $\Delta_{B'}$, $\Delta_{C'}$ sunt concurente în mijlocul segmentului HH' unde H și H' sunt ortocentrele triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ [6], [8].

Numeroase exemple de triunghiuri S se găsesc în [1], [2], [4], [5], [8], [12], [13], [14]. Printre ele, poate cea mai cunoscută pereche de triunghiuri S este cea formată din triunghiul ortic și cel median înscrise în cercul celor nouă puncte, pentru care cele șase drepte Wallace-Simson sunt concurente în punctul lui Spiecker al triunghiului ortic, adică în centrul cercului înscris în triunghiul median al triunghiului ortic [8].

În [7] Traian Lalescu arată că mijlocul segmentului HH', adică punctul de intersecție al celor șase drepte Wallace-Simson este ortopolul fiecăreia dintre laturile unuia dintre triunghiuri în raport cu celălalt. Din acest motiv triunghiurile S se mai numesc în literatura de specialitate *triunghiuri ortopolare*.

În planul complex condiția necesară și suficientă ca triunghiurile ABC și $A'B'C'$ să fie triunghiuri S este $abc = a'b'c'$, unde a, b, c, a', b', c' sunt afixele punctelor A, B, C, A', B', C' [1], [4], [9], [13], [14].

Relația S între două triunghiuri este o relație de echivalență și, din acest motiv, Traian Lalescu folosește în titlul notei [6] noțiunea de clasă. Scopul principal al acestui articol este de a caracteriza în planul complex, dar și în planul euclidian real, un reprezentant special al unei clase de echivalență S, și anume unicul triunghi echilateral ce aparține unei anumite clase. Pentru aceasta vom exemplifica această idee prin două probleme publicate în Gazeta Matematică.

2. Două probleme din Gazeta Matematică

2.1 (Daniel Văcărețu, Concursul interjudețean „Grigore Moisil", Tg. Mureș 2018) Considerăm în planul complex triunghiul $A_1A_2A_3$ înscris în cercul unitate, având afixele vârfurilor numerele complexe a_1, a_2, a_3. Fie B_1, B_2, B_3 punctele ale căror afixe sunt rădăcinile de ordinul trei ale numărului complex $a_1a_2a_3$. Notăm P_1, P_2, respectiv P_3 proiecțiile punctelor B_1, B_2, respectiv B_3 pe dreptele A_2A_3, A_3A_1 respectiv A_1A_2. Să se demonstreze că perpendicularele din P_1, P_2, respectiv P_3 pe dreptele B_2B_3, B_3B_1 respectiv B_1B_2 sunt concurente.

Soluție. Ecuația dreptei A_2A_3 este

$$z + a_2a_3\overline{z} = a_2 + a_3. \tag{1}$$

Notăm cu b_1, b_2, b_3 afixele punctelor B_1, B_2, B_3. Ecuația perpdicularei din B_1 pe A_2A_3 este:

$$z - b_1 = a_2a_3(\overline{z} - \overline{b_1})$$

$$\iff z - a_2a_3\overline{z} = b_1 - \overline{b_1}a_2a_3. \tag{2}$$

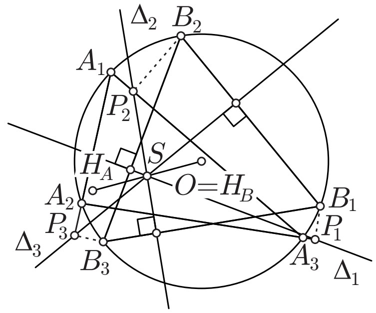

Figura 1

Din (1) și (2) rezultă prin adunare membru cu membru

$$z = \frac{1}{2}(b_1 + a_2 + a_3 - \overline{b_1}a_2a_3).$$

Dacă notăm cu p_1, p_2, p_3 afixele punctelor P_1, P_2, P_3 atunci numărul z obținut mai sus este afixul p_1 al lui P_1, adică

$$p_1 = \frac{1}{2}(b_1 + a_2 + a_3 - \overline{b_1}a_2a_3). \tag{3}$$

Ecuația perpendicularei din P_1 pe B_2B_3 este

$$z - p_1 = b_2b_3(\overline{z} - \overline{p_1}) \iff z - b_2b_3\overline{z} = p_1 - \overline{p_1}b_2b_3$$

$$\iff z - b_2b_3\overline{z} = \frac{1}{2}[(b_1 + a_2 + a_3 - \overline{b_1}a_2a_3) - (\overline{b_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} - b_1\overline{a_2}\,\overline{a_3})b_2b_3]$$

$$\iff z - b_2b_3\overline{z} = \frac{1}{2}(b_1 + a_2 + a_3 - \overline{b_1}a_2a_3 - \overline{b_1}b_2b_3 - \overline{a_2}b_2b_3 - \overline{a_3}b_2b_3 + b_1b_2b_3\overline{a_2}\,\overline{a_3}) \tag{4}$$

Deoarece b_1, b_2, b_3 sunt rădăcinile de ordinul trei ale numărului complex $a_1a_2a_3$, adică sunt soluțiile ecuației $z^3 = a_1a_2a_3$, rezultă că

$$b_1b_2b_3 = a_1a_2a_3, \quad b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

și, în plus,

$$|b_1| = |b_2| = |b_3| = |a_1| = |a_2| = |a_3| = 1.$$

Deci, relația (4) este echivalentă cu

$$z - b_2b_3\overline{z} = \frac{1}{2}(b_1 + a_2 + a_3 - \overline{b_1}a_2a_3 - b_1b_2b_3\overline{b_1}^2 - b_1b_2b_3\overline{b_1}\,\overline{a_2} - b_1b_2b_3\overline{b_1}\,\overline{a_3} + a_1)$$

$$\iff z - b_2b_3\overline{z} = \frac{1}{2}(s_1 + b_1 - s_3\overline{b_1}\,\overline{a_1} - a_3\overline{b_1}^2 - s_3\overline{b_1}\,\overline{a_2} - s_3\overline{b_1}\,\overline{a_3})$$

unde am notat $s_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $s_3 = a_1a_2a_3 = b_1b_2b_2$.

Deci

$$z - b_2b_3\overline{z} = \frac{1}{2}[s_1 + b_1 - s_3\overline{b_1}(\overline{s_1} - \overline{b_1})]. \tag{5}$$

Analog, ecuația perpendicularei din P_2 pe B_3B_1 este

$$z - b_3b_1\overline{z} = \frac{1}{2}[s_1 + b_2 - s_3\overline{b_2}(\overline{s_1} - \overline{b_2})]. \tag{6}$$

Înmulțim ecuația (5) cu b_1 și ecuația (6) cu b_2 și scădem ecuațiile obținute. Rezultă

$$z(b_1 - b_2) = \frac{1}{2}\left[s_1(b_1 - b_2) + (b_1 - b_2)(b_1 + b_2) - s_3\ \frac{b_2 - b_1}{b_1b_2}\right]$$

$$\iff\ z = \frac{1}{2}[s_1 + b_1 + b_2 + b_3] \iff z = \frac{1}{2}s_1.$$

Analog și dreapta perpendiculară din P_3 pe B_1B_2 va trece prin punctul de afix $z = \frac{1}{2}s_1$, care este mijlocul segmentului OH_A unde H_A este ortocentrul triunghiului $A_1A_2A_3$, adică centrul cercului celor nouă puncte al triunghiului $A_1A_2A_3$.

2.2 (Daniel Văcărețu, Problema 27608, GM 11/2018) Pe cercul unitate $\mathcal{C}(O, 1)$ se consideră punctele A_1, A_2, A_3 ale căror afixe sunt rădăcinile cubice ale unității și punctele B_1, B_2, B_3 de afixe b_1, b_2, b_3. Fie C_1, C_2, C_3 proiecțiile punctelor B_1, B_2, B_3 pe dreptele A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2.

Să se demonstreze că, dacă $b_1b_2b_3 = 1$, atunci perpendicularele duse C_1, C_2, C_3 pe B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 sunt concurente în mijlocul segmentului OH_B, unde H_B este ortocentrul triunghiului $B_1B_2B_3$.

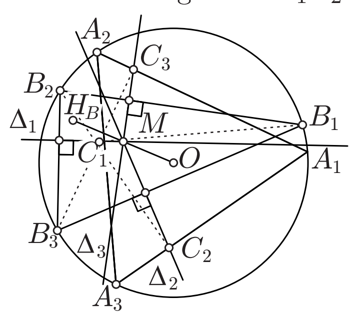

Figura 2

Soluția completă a problemei se găsește în GM. 5/2019 și nu o mai reproducem aici, fiind asemănătoare cu soluția problemei precedente. □

Să observăm că în ambele probleme triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ sunt triunghiuri S, pentru că $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3$, iar perpendicularele din P_1, P_2, respectiv P_3 pe B_2B_3, B_3B_1, respectiv B_1B_2 din prima problemă și perpendicularele din C_1, C_2, respectiv C_3 pe B_2B_3, B_3B_1, respectiv B_1B_2 din a doua problemă sunt drepte Wallace-Simson caracterizate prin punct (o proiecție) și pantă datorită proprietăților triunghiurilor S (nu prin teorema celor trei proiecții coliniare).

În prima problemă, unui triunghi oarecare $A_1A_2A_3$ i se atașează triunghiul echilateral unic $B_1B_2B_3$ cu care se află în relația S, iar în a doua problemă triunghiului echilateral $A_1A_2A_3$ i se asociază un triunghi $B_1B_2B_3$ față de care este triunghi S.

3. Derivatul echilateral al unui triunghi dat

După cum s-a văzut în prima problemă, dându-se un triunghi oarecare $A_1A_2A_3$ înscris în cercul unitate $\mathcal{C}(O,1)$ cu afixele vârfurilor a_1, a_2, a_3, atunci există un triunghi echilateral $B_1B_2B_3$ cu afixele vârfurilor rădăcinile complexe ale ecuației $z^3 = a_1a_2a_3$, triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ fiind triunghiuri S. Punctele B_1, B_2, B_3 se numesc punctele lui Boutin [3], [10], iar triunghiul echilateral $B_1B_2B_3$ este cunoscut în literatura de specialitate cu denumirile „the equilateral derivative of a triangle" sau „mean triangle" [11].

Vom prezenta în final o abordare sintetică a existenței și „construcției" acestui reprezentant special al unei clase de echivalență S a unui triunghi oarecare.

Teoremă. *Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi oarecare. Bisectoarele interioare ale unghiurilor A_1, A_2, respectiv A_3 intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$ în punctele A_1', A_2', respectiv A_3'. Fie A_1'', A_2'', respectiv A_3'' punctele diametral opuse punctelor A_1', A_2', respectiv A_3'. Considerăm punctele B_1, B_2, respectiv B_3 astfel încât $\mathrm{m}(\widehat{A_1''B_1}) = \frac{1}{3}\mathrm{m}(\widehat{A''A})$, $\mathrm{m}(\widehat{A_2''B_2}) = \frac{1}{3}\mathrm{m}(\widehat{A_2''A_2})$ și $\mathrm{m}(\widehat{A_3''B_3}) = \frac{1}{3}\mathrm{m}(\widehat{A_3''A_3})$.*

Atunci:

i) *triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $A_1''A_2''A_3''$ sunt triunghiuri S (fig. 3);*

ii) *triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ sunt triunghiuri S;*

iii) *triunghiul $B_1B_2B_3$ este echilateral (fig. 4).*

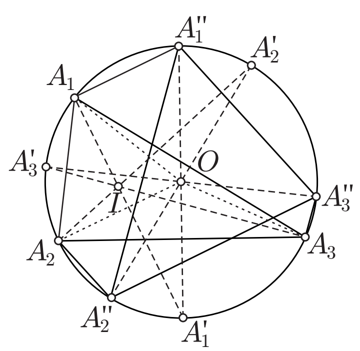

Figura 3

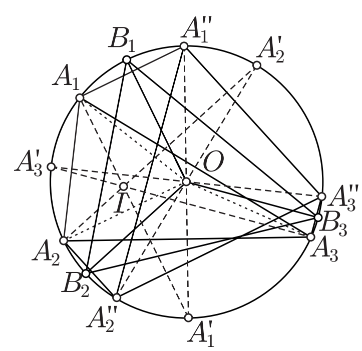

Figura 4

Demonstrație. i) În figura 3 avem

$$\begin{aligned}\mathrm{m}(\sphericalangle A_1') &= \mathrm{m}(\sphericalangle A_1'A_1O) = \mathrm{m}(\sphericalangle A_2A_1O) - \mathrm{m}(\sphericalangle A_2A_1A_1') \\ &= 90^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle A_3) - \frac{1}{2}\mathrm{m}(\sphericalangle A_1).\end{aligned}$$

Analog

$$m(\sphericalangle A_2') = \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_2) - 90^\circ + m(\sphericalangle A_1)$$

și

$$m(\sphericalangle A_3') = 90^\circ - m(\sphericalangle A_1) - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_3).$$

Vom verifica relația

$$m(\widehat{A_1A_1''}) = m(\widehat{A_2A_2''}) + m(\widehat{A_3A_3''}) \tag{7}$$

care, având în vedere orientarea celor trei arce este echivalentă cu condiția

$$m(\widehat{A_1A_1''}) + m(\widehat{A_2A_2''}) + m(\widehat{A_3A_3''}) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

$$\begin{aligned} m(\widehat{A_1A_1''}) = m(\widehat{A_2A_2''}) + m(\widehat{A_3A_3''}) &\iff m(\sphericalangle A_1') = m(\sphericalangle A_2') + m(\sphericalangle A_3') \\ \iff 90^\circ - m(\sphericalangle A_3) - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_1) &= \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_2) - 90^\circ + m(\sphericalangle A_1) \\ &\quad +90^\circ - m(\sphericalangle A_1) - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_3) \\ \iff 90^\circ &= \frac{1}{2}[m(\sphericalangle A_1) + m(\sphericalangle A_2) + m(\sphericalangle A_3)] \\ &\iff 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Prin urmare, condiția (7) fiind îndeplinită, rezultă că triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $A_1''A_2''A_3''$ sunt triunghiuri S.

ii) $m(\widehat{A_1B_1}) + m(\widehat{A_2B_2}) + m(\widehat{A_3B_3})$

$= \frac{2}{3}(m(\widehat{A_1A_1''} + m(\widehat{A_2A_2''}) + m(\widehat{A_3A_3''}) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$

Deci triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ sunt triunghiuri S.

iii) În figura 4 avem

$$m(\sphericalangle A_1OA_1'') = 2m(\sphericalangle A_1') = 180^\circ - 2m(\sphericalangle A_3) - m(\sphericalangle A_1).$$

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle A_1OB_1) &= \frac{2}{3}m(\sphericalangle A_1OA_1'') = \frac{2}{3}[180^\circ - 2m(\sphericalangle A_3) - m(\sphericalangle A_1)] \\ &= 120^\circ - \frac{4}{3}m(\sphericalangle A_3) - \frac{2}{3}m(\sphericalangle A_1). \end{aligned}$$

Analog

$$m(\sphericalangle A_2OB_2) = \frac{2}{3}m(\sphericalangle A_2) - 120^\circ + \frac{4}{3}m(\sphericalangle A_1).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle B_1OB_2) &= m(\sphericalangle A_1OB_1) + m(\sphericalangle A_1OA_2) + m(\sphericalangle A_2OB_2) \\ &= 120^\circ - \frac{4}{3}m(\sphericalangle A_3) - \frac{2}{3}m(\sphericalangle A_1) \\ &\quad + 2m(\sphericalangle A_3) + \frac{2}{3}m(\sphericalangle A_2) - 120^\circ + \frac{4}{3}m(\sphericalangle A_1) \\ &= \frac{2}{3}[m(\sphericalangle A_1) + m(\sphericalangle A_2) + m(\sphericalangle A_3)] = 120^\circ. \end{aligned}$$

Analog

$$\mathrm{m}(\sphericalangle B_2OB_3) = \mathrm{m}(\sphericalangle B_3OB_1) = 120^\circ.$$

Prin urmare triunghiul $B_1B_2B_3$ este echilateral.

Observații.

1. A_1A_1'', A_2A_2'', A_3A_3'' sunt bisectoarele exterioare ale unghiurilor triunghiului $A_1A_2A_3$.

2. „Construcția" triunghiului echilateral $B_1B_2B_3$ este virtuală, neputându-se efectua cu rigla și compasul (imposibilitatea trisecțiunii unghiului).

3. În cazul triunghiului ortic $A_1A_2A_3$ al triunghiului oarecare $T_1T_2T_3$, triunghiul asociat $A_1''A_2''A_3''$ este chiar triunghiul median (fig. 5).

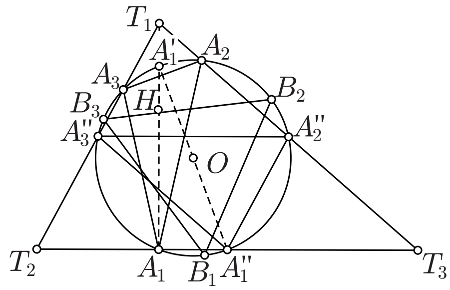

Figura 5

Într-adevăr, bisectoarea unghiului A_1 este înălțime în triunghiul $T_1T_2T_3$ și intersectează a doua oară cercul celor nouă puncte în A_1', care este mijlocul segmentului T_1H (unde H este ortocentrul triunghiului $T_1T_2T_3$ și totodată centrul cercului înscris al triunghiului ortic $A_1A_2A_3$). Punctul diametral opus lui A_1' este mijlocul laturii T_2T_3, adică punctul A_1''.

Bibliografie

[1] T. Andreescu, D. Andrica, *Complex Numbers from A to... Z*, Second Edition, Birkhäuser, 2014.

[2] D. Andrica, Cs. Varga, D. Văcărețu, *Teme și Probleme Alese de Geometrie*, Ed. Plus, București, 2002.

[3] R. Deaux, *Introduction to the Geometry of Complex Numbers*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2008.

[4] Hahn Liang-Shin, *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994.

[5] A. Jurjuț, D. Văcărețu, *În legătură cu problema C:105* (*Un exemplu de triunghiuri S*), Gazeta Matematică, Publicație lunara pentru tineret, 7, 1982, pp. 246-248.

[6] T. Lalescu, *O clasă de triunghiuri remarcabile*, Gazeta Matematică, vol. XX(1915), pag. 213.

[7] T. Lalescu, *Despre ortopol*, Gazeta Matematica, vol. XX(1915), pag. 294.

[8] C. Mihalescu, *Geometria Elementelor Remarcabile*, Ed. Tehnică, București, 1957.

[9] N. Mihăileanu, *Utilizarea Numerelor Complexe în Geometrie*, Ed. Tehnică, București, 1968.

[10] P.S. Modenov, *Problems in Geometry*, MIR Publishers, Moscow, 1981.

[11] O.J. Ramler, *On Triangles Having a Common Mean*, The American Mathematical Monthly, Vol. 47, No. 3 (Mar., 1940), pp. 140-145.

[12] D. Văcărețu, *Left and Right Isoscelizers and S Triangles*, Gazeta Matematică, seria A, 1-2(2016), pp. 33-42.
[13] D. Văcărețu, *17,..., 2017 și Triunghiuri S*, Gazeta Matematică 3(2018), pp. 113-119.
[14] D. Văcărețu, *An Example of S Triangles Arising from two I.M.O. Problems*, International Journal of Geometry, Vol. 9 (2020), No. 2, pp. 137-149.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ACȚIUNI DE GRUPURI

TUDOR PĂIȘANU[1)]

În această lecție vom prezenta un concept fundamental în Teoria Grupurilor: acțiunile grupurilor pe mulțimi. Ca aplicații, vom rezolva câteva probleme de concurs. În afara de faptul că, pe această cale, putem obține soluții mai rapide, obinem o înțelegere mai adâncă a fenomenelor studiate.

Noțiuni introductive

Vom începe prin a enunța principalele noțiuni de care vom avea nevoie pe parcursul articolului. Vom nota cu S_A grupul simetric al mulțimii A (grupul permutărilor pe A), cu $H \leqslant G$ faptul că H este un subgrup al lui G și cu $H \lhd G$ faptul că H este un subgrup normal al lui G.

Definiție. Fie grupul G și mulțimea nevidă A. Numim *acțiune* a lui G pe A o operație binară $\cdot : G \times A \to A$ cu următoarele proprietăți:

a) $e \cdot a = a, \forall a \in A$, unde e este elementul neutru al grupului;

b) $g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1 g_2) \cdot a, \forall a \in A, g_1, g_2 \in G$.

Propoziție. Fie grupul G care acționează pe mulțimea nevidă A. Atunci $\pi_g : A \to A$, $\pi_g(a) = g \cdot a$ este o permutare.

Mai mult, $\varphi : G \to S_A$, $\varphi(g) = \pi_g$ este un morfism de grupuri și, reciproc, orice astfel de morfism induce o acțiune a lui G pe A.

Demonstrație. Din definiția unei acțiuni avem $\pi_g \circ \pi_h = \pi_{gh}$ și $\pi_e = \mathrm{id}_A$, de unde rezultă ușor toate afirmațiile din propoziție. $\square$

Vom identifica adesea acțiunea cu morfismul dat de aceasta. Ca atare, prin nucleul unei acțiuni vom înțelege nucleul morfismului indus de aceasta: $\{g \in G \mid \pi_g = \mathrm{id}_A\}$.

Pe parcursul următoarelor definiții, propoziții și teoreme considerăm grupul G care acționează pe o mulțime nevidă A și φ morfismul asociat acesteia.

Pentru $g \in G$ notăm $\mathrm{Fix}\ g = \{a \in A \mid g \cdot a = a\}$ *mulțimea punctelor fixe* ale lui g.

Pentru $a \in A$ notăm $\mathrm{Stab}_G(a) = \{g \in G \mid g \cdot a = a\}$ *stabilizatorul* lui a.

Observație. Pentru orice $a \in A$, $\mathrm{Stab}_G(a)$ este subgrup al lui G.

[1)]Elev, Liceul Național, București