## Clasa a IX-a

**13.** Determinaţi $x \in \mathbb{R} \setminus [0; 1)$ astfel încât $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{[x]} = \dfrac{1}{1 + \{x\}}$.

**14.** Arătaţi că:

a) $\dfrac{(a+b)^4}{16} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a^3+b^3}{2} \leqslant \dfrac{a^4+b^4}{2}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$;

b) $a^2 + 2b^2 - 2ab + 2a - 4b + 2 \geqslant 0$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

**15.** a) Arătaţi că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că, dacă numerele reale $a$, $b$, $c$ verifică relaţia $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ şi cel puţin două dintre sunt distincte, atunci $a + b + c = 0$.

c) Dacă $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c = 8$ şi $ab + ac + bc = 19$, să se calculeze $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

**16.** Arătaţi că distanţa de la centrul cercului circumscris unui triunghi oarecare la o latură a sa este egală cu jumătatea distanţei de la ortocentrul triunghiului la vârful opus acestei laturi.

**17.** În triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$, se duce înălţimea $AD$. Fie $M$ şi $P$ mijloacele segmentelor $AD$, respectiv $AC$, $BM \cap AC = \{N\}$, $BP \cap AD = \{R\}$. Demonstraţi că patrulaterul $MNPR$ este inscriptibil.

**18.** În triunghiul $ABC$, $A'$, $B'$ sunt mijloacele laturilor $BC$, respectiv $AC$, $D$ este piciorul înălţimii din $A$, $H$ este ortocentrul triunghiului, iar $A_1$ este mijlocul segmentului $AH$. Demonstraţi că punctele $A'$, $B'$, $A_1$ şi $D$ sunt conciclice.

## Clasa a X-a

**19.** Arătaţi că $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leqslant ab, \forall a, b \in (1, +\infty)$.

**20.** a) Arătaţi că în scrierea zecimală a oricărui număr iraţional există cel puţin o cifră care se repetă de o infinitate de ori.

b) Demonstraţi că numărul $x = \overline{2{,}a1a11a111a1111a\ldots}$ este iraţional, unde $a$ este o cifră diferită de 1.

**21.** Calculaţi suma $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k + \sqrt{4k^2 - 1}}}$ .

**22.** Arătaţi că expresia $E(x, y) = \dfrac{x - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{xy} + \sqrt{y}}$, unde $x, y > 0$, $x \neq y$, este constantă.

**23.** Se consideră o mulţime $M$ de numere reale cu proprietăţile: i) $1 \in M$; ii) dacă $x \in M$, atunci $(3x + 2) \in M$; iii) dacă $x^3 \in M$, atunci $(x + 1) \in M$.

Arătaţi că $3 \in M$ şi $(1 + \sqrt[3]{2}) \in M$.

**24.** Fie $x, y, z$ numere reale şi $a = 1 + 2x - y^2$, $b = 1 + 2y - z^2$, $c = 1 + 2z - x^2$.

a) Arătaţi că există un singur triplet $(x, y, z)$ pentru care are sens expresia $E = \sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[c]{x + y + z}}}$;

b) determinaţi valoarea expresiei $E$, ştiind că aceasta are sens.