O NOUĂ REZOLVARE A PROBLEMEI 22694

Leonard Giugiuc[1)]

Abstract. The purpose of this article is to show a new proof for an (not so) old problem from Gazeta Matematică.

Keywords: cyclic inequality, homogenuous fourth degree polynomial

MSC: 26D15, 26D20

În Gazeta Matematică nr.7-8/1992 a apărut urmatoarea problemă, semnată de Vasile Cîrtoaje.

Dacă x, y şi z sunt numere pozitive, atunci

$$x^2(x-y)(x-2y)+y^2(y-z)(y-2z)+z^2(z-x)(z-2x)\geqslant 0,$$

sau, într-o formă mai slabă: *dacă x, y şi z sunt numere pozitive, atunci*

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\sqrt{3(x^3y+y^3z+z^3x)}.$$

Dată fiind forma extrem de interesantă a problemei, în timp au fost găsite diverse demonstraţii.

Cea mai spectaculoasă este, poate:

$$(x^2+y^2+z^2)^2-3(x^3y+y^3z+z^3x)=\frac{1}{2}\sum_{\text{cic}}(x^2-2xy+yz-z^2+zx)^2\geqslant 0. \quad (1)$$

Formula de mai sus nu numai că demonstrează problema, dar, de asemenea, sugerează şi alte cazuri de realizare a egalităţii decât cel trivial.

În cele ce urmează prezentăm o nouă demonstraţie, care poate constitui un punct de plecare în studiul inegalităţilor omogene ciclice.

Vom demonstra aşadar că, dacă x, y şi z sunt numere reale, atunci are loc (1).

1) Profesor, Colegiul Naţional „Traian“, Drobeta-Turnu Severin.

Cazul I: $x+y+z \neq 0$. Datorită faptului că ambii membri ai lui (1) sunt polinoame omogene de gradul 4, putem presupune, fără restângerea generalităţii, că $x+y+z=3$. Notăm $x-1=a$, $y-1=b$ şi $z-1=c$. Atunci $a+b+c=0$, $x=a+1$, $y=b+1$ şi $z=c+1$.

Astfel, (1) devine

$$(a^2+b^2+c^2+3)^2 \geqslant 3\sum_{\text{cic}}(a+1)^3(b+1). \tag{2}$$

Dar

$$(a+1)^3(b+1)+(b+1)^3(c+1)+(c+1)^3(a+1) = a^3b+b^3c+c^3a+$$
$$+a^3+b^3+c^3+3(a^2b+b^2c+c^2a+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3).$$

Din $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$ obţinem $ab+bc+ca=-(a^2+b^2+c^2)/2 \leqslant 0$, iar din $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$ obţinem $a^3+b^3+c^3=3abc$.

De asemenea, din formulele $(a^3b+b^3c+c^3a)-(ab^3+bc^3+ca^3) = (a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$ şi $(a^3b+b^3c+c^3a)+(ab^3+bc^3+ca^3)=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(a^4+b^4+c^4)$ obţinem $a^3b+b^3c+c^3a=-\dfrac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)$, iar din $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ obţinem $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=a^4+b^4+c^4$.

Deci, inegalitatea (2) devine echivalentă cu

$$18(a^2b+b^2c+c^2a+abc) \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)+7(a^4+b^4+c^4). \tag{3}$$

Să remarcăm că

$$[(a-b)(a-c)(b-c)]^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix},$$

unde $S_k=a^k+b^k+c^k$, $k=1,2,3,4$. Astfel,

$$[(a-b)(a-c)(b-c)]^2 = 3S_2S_4+2S_1S_2S_3-(S_2^3+3S_3^2+S_1^2S_4). \tag{$*$}$$

Cum $S_1=0$, înlocuind în $(*)$ obţinem

$$[(a-b)(a-c)(b-c)]^2 = 3S_2S_4-(S_2^3+3S_3^2).$$

Fie $S_2=6q^2$, cu $q \geqslant 0$. Atunci $S_3=3p$, cu $p=abc$ si $S_4=18q^4$, deci

$$[(a-b)(a-c)(b-c)]^2 = 108q^6-27p^2 = 27(4q^6-p^2).$$

Observăm de aici că $-2q^3 \leqslant p \leqslant 2q^3$.

Pentru $q=0$, $a=b=c=0$, deci nu avem ce demonstra.

Pentru $q>0$, inegalitatea (3) devine echivalentă cu

$$a^2b+b^2c+c^2a+p \leqslant q^2+7q^4. \tag{4}$$

Dar $(a-b)(a-c)(b-c)=(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)$, deci

$$|(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)| = \sqrt{27(4q^6-p^2)};$$

de asemenea,

$$(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=-3p.$$

Fără pierderea generalităţii, putem presupune $a=\max\{a,b,c\}$.

Cazul I.1: $b\leqslant c$. Din $(a-b)(a-c)(b-c)\leqslant 0$ reiese $(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)=-\sqrt{27(4q^6-p^2)}$ şi, cum $(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)=-3p$, obţinem

$$a^2b+b^2c+c^2a+p=-\frac{p+\sqrt{27(4q^6-p^2)}}{2}.$$

Considerăm funcţia $f:[-2q^3,2q^3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-\sqrt{27(4q^6-x^2)}$. Avem $f'(x)=-1+\dfrac{27x}{\sqrt{27(4q^6-x^2)}}$, $x\in(-2q^3,2q^3)$. Unicul punct critic este $x_0=q^3/\sqrt{7}$. Cum $f'(0)=-1<0$ si $f'(2q^3-0)=+\infty>0$, deducem că $\max f\in\{f(-2q^3),f(2q^3)\}=2q^3$. Astfel, în acest caz, $a^2b+b^2c+c^2a+abc\leqslant q^3<q^2+7q^4$.

Cazul I.2: $b\geqslant c$. Din $(a-b)(a-c)(b-c)\geqslant 0$ reiese $(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)=\sqrt{27(4q^6-p^2)}$ şi, cum $(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)=-3p$, obţinem

$$a^2b+b^2c+c^2a+p=\frac{-p+\sqrt{27(4q^6-p^2)}}{2}.$$

Considerăm funcţia $f:[-2q^3,2q^3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+\sqrt{27(4q^6-x^2)}$, $x\in[-2q^3,2q^3]$. Atunci $f'(x)=-1-\dfrac{27x}{\sqrt{27(4q^6-x^2)}}$, $x\in(-2q^3,2q^3)$. Unicul punct critic este $x_0=-q^3/\sqrt{7}$. Cum $f'(0)=-1<0$ şi $f'(-2q^3+0)=+\infty>0$, deducem ca $\max f=f(-q^3/\sqrt{7})=4q^3\sqrt{7}$. Astfel, în acest caz avem $a^2b+b^2c+c^2a+abc\leqslant 2q^3\sqrt{7}$. Cum $q^2+7q^4-2q^3\sqrt{7}=q^2(q\sqrt{7}-1)^2\geqslant 0$, demonstraţia lui (4) este încheiată.

Cazul II: $x+y+z=0$. De mai sus, $x^3y+y^3z+z^3x=-(x^4+y^4+z^4)/2\leqslant 0$, de unde $(x^2+y^2+z^2)^2\geqslant 3(x^3y+y^3z+z^3x)$. □

Fie $\alpha>\beta>\gamma$ rădăcinile ecuaţiei $49x^3-21x+1=0$. De mai sus deducem că egalitatea are loc pentru tripletele $(0,0,0)$, precum şi (α,β,γ) şi permutările circulare ale sale. Aşadar, inegalitatea iniţială devine egalitate şi în alte puncte decat cel trivial.

În încheiere, lăsăm în seama cititorului demonstrarea faptului că valorile netriviale în care se atinge egalitatea sunt direct proporţionale cu tripletul $\sin^2\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)$, $\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$, $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$, sau cu permutările sale circulare, i.e. cu pătratele laturilor unui triunghi heptagonal – un alt aspect fascinant al acestei probleme.

Bibliografie

[1] Colecţia Gazeta Matematica seria B.
[2] https://artofproblemsolving.com/community/c6t243f6h6026_neq3