

## Clasa a IX-a

13. Arătați că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 9}(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1})$  este mărginită.

14. Se consideră ecuația  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x \cdot y} = 8$ , unde  $x, y \in \mathbb{N}$ .

a) Arătați că, dacă  $(x_0, y_0)$  este o soluție a ecuației, atunci  $x$  și  $y$  sunt pătrate perfecte.

b) Rezolvați ecuația.

15. Arătați că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left\{ \frac{x}{43} \right\} + \left\{ \frac{x}{47} \right\}$  este periodică. Care este perioada principală?

16. a) Demonstrați că, pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  și orice  $n \in \mathbb{N}^*$  avem:

i)  $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$ .

ii)  $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ .

b) Dacă  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , calculați

$$\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^2}\right) \dots \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^{2021}}\right).$$

17. Demonstrați că, pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , avem:

a)  $\cos(x + y) = 1 - 2 \sin^2 \frac{x + y}{2}$  și  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$ .

b)  $\cos(x + y) - \sin x - \sin y \leq \frac{3}{2}$  și  $\cos(x + y) + \sin x + \sin y \leq \frac{3}{2}$ .

18. Arătați că, pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,

$$\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 2020x}{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos 2020x} = \operatorname{tg} 1010x.$$

## Clasa a X-a

19. Rezolvați ecuația

$$\sqrt{2x + 1} + \sqrt{3x + 2} + \sqrt{4x + 3} = \sqrt{1 - 2x} + \sqrt{2 - 3x} + \sqrt{3 - 4x}.$$

20. Se dă expresia  $E(x) = \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} + \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x}$ .

a) Determinați valorile parametrului real  $m$ , pentru care ecuația  $E(x) = m$  are soluții.

b) Determinați valorile parametrului real  $m$ , pentru care expresia  $E(x)$  este constantă pe  $\mathbb{R}$ .

21. Rezolvați ecuația  $[\sin x] \cdot \{\sin x\} = \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$

22. Arătați că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0) \\ -2x, & x \in [0, \infty) \end{cases}$  este

inversabilă.

23. Rezolvați ecuația  $3^{\sqrt{x-1}} + 7^{\sqrt{x^2-5x+4}} = 2(\sin^2 2021 + \cos^2 2021)$ .

---

**24.** Se consideră ecuația  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  și numărul  $N = \operatorname{arctg}(x_1) + \operatorname{arctg}(x_2)$ . Arătați că numărul  $\frac{2}{\pi}N$  este natural.