

Clasa a IX-a

13. Există numere raționale $x > 0$ astfel încât $[x] = x \cdot \{x\}$?

14. Arătați că dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $a^{2021} = b - c$, $b^{2021} = c - a$ și $c^{2021} = a - b$, atunci $a = b = c$.

15. a) Arătați că $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{9}$,

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77\dots7}_{\text{de } n \text{ ori}}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Fie A, B, M puncte distincte pe dreapta d astfel încât $\frac{MA}{MB} = a$.

Arătați că:

a) $\vec{OM} = \frac{1}{a+1} \cdot \vec{OA} + \frac{a}{a+1} \cdot \vec{OB}$, dacă $M \in (AB)$;

b) $\vec{OM} = \frac{1}{1-a} \cdot \vec{OA} + \frac{a}{a-1} \cdot \vec{OB}$, dacă $M \notin [AB]$.

17. În triunghiul ABC , $m(\sphericalangle ABC) = 2 \cdot m(\sphericalangle ACB)$. Arătați că $AC^2 - AB^2 = AB \cdot BC$.

18. Demonstrați că distanța de la centrul cercului circumscris unui triunghi oarecare la o latură a sa este egală cu jumătatea distanței de la ortocentrul triunghiului la vârful opus acestei laturi.

Clasa a X-a

19. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile :

a) $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$

b) $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$

20. Arătați că numărul $\frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{1}{7} - \arccos \frac{13}{14} \right)$ este rațional.

21. Calculați suma

$$S = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

22. Câte numere de 4 cifre încep și se termină cu o cifră pară?

23. Un număr natural se numește „palindrom” dacă este egal cu răsturnatul său (numărul citit de la dreapta la stânga). De exemplu, numerele 7, 292, 44144 sunt numere palindrom.

a) Câte numere palindrom de 3 cifre există? Dar de 4 cifre?

b) Care este al 40-lea număr palindrom de forma $5k + 3$, unde k este număr natural?

24. Pe fiecare dintre laturile unui triunghi se consideră trei puncte distincte, diferite de vârfuri. Câte triunghiuri având vârfurile în trei din cele 9 puncte se pot forma?