Clasa a IX-a

13. Arătați că, dacă $a, b \in (-1, 1)$, atunci și $\dfrac{a+b}{1+ab} \in (-1, 1)$.

14. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

b) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

c) $13^n + 7^n - 2$ se divide cu 6.

15. În câte moduri se pot așeza 8 turnuri pe o tablă de șah, astfel încât să nu existe 2 care să se atace (adică să se găsească pe aceeași linie sau coloană).

16. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N mijloacele laturilor AD, respectiv BC.

a) Arătați că $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

b) Arătați că $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}\right)$.

c) Arătați că, dacă $AB \parallel CD$, atunci $MN \parallel AB$ și $MN = \dfrac{AB+CD}{2}$.

17. a) Fie $ABCD$ un patrulater convex și punctele M și N mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD. Arătați că $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

b) Dacă $ABCD$ este trapez de baze AB și CD, exprimați lungimea segmentului MN în funcție de lungimile bazelor.

18. Considerăm triunghiul ABC și $D \in BC$ astfel încât $\overrightarrow{BD} = \dfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$, mediana CE, $E \in AB$ și F mijlocul lui CE. Arătați că A, F, D sunt coliniare.

Clasa a X-a

19. Arătați că, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, are loc relația

$$\left|z+\frac{1}{2}\right|^2 + i \cdot \left|z+\frac{1}{2}\right|^2 - (1+i)\,|z|^2 - \frac{1}{4}\,(1+i) = z.$$

20. Verificați identitățile:

a) $\left|\left|\frac{z_2}{z_1}\right| \cdot z_1 + \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot z_2\right| = |z_1+z_2|$, oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

b) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$, oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

c) $|z_1\overline{z_2}+1|^2 + |z_1-z_2|^2 = (|z_1|^2+1)\cdot(|z_2|^2+1)$, oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

21. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2$. Aflați $|z|$.

22. Determinați numerele complexe z de modul 1 care verifică relația $\left|z^2+\overline{z}^2\right| = 2$.

23. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demonstrați inegalitățile:

a) $\left|\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}{2}\right| \leqslant |z_1 z_2|$.

b) $||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$.

24. Fie $z \in \mathbb{C}$. Arătați că, dacă $|z| < \frac{1}{2}$, atunci $\left|(1+i)\,z^3+iz\right| < \frac{3}{4}$.