GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXVI nr. 11 **noiembrie 2021**

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

CÂTEVA PERECHI DE MATRICE IDEMPOTENTE ȘI DE MATRICE INVOLUTIVE DIN $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$

Vasile Pop[1)] Mihai Opincariu[1)]

Abstract. The purpose of this article is to present some pairs of idempotent or involutory matrices which share the same kernel, or image, or fixed points, or rank

Keywords: matrix, idempotent, involutory, kernel, fixed points, rank.

MSC : 15A24, 15A27

1. Rezultate teoretice folosite

Definiţii. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește matrice idempotentă (sau matrice de proiecție) dacă $A^2 = A$.

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește matrice involutivă (sau matrice de simetrie) dacă $A^2 = I_n$.

Imaginea unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este imaginea funcției liniare asociate, adică

$$\operatorname{Im} A = \{A \cdot X \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\}.$$

Mulțimea punctelor fixe ale unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este mulțimea punctelor fixe ale funcției liniare asociate, adică

$$\operatorname{Fix} A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid A \cdot X = X\}.$$

Nucleul unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este mulțimea

$$\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid A \cdot X = 0\}.$$

Propoziţia 1. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice idempotentă, atunci:

1) Valorile proprii ale matricei A sunt 0 sau 1. (Singura matrice idempotentă cu toate valorile proprii egale cu 0 este matricea O_n și singura matrice idempotentă cu toate valorile proprii egale cu 1 este matricea I_n).

[1)]Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

[1)]Liceul Teoretic „Avram Iancu“, Brad

2) Matricea A este diagonalizabilă, adică există o matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabilă astfel ca

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = J_A,$$

unde $k = \mathrm{rang}A = \mathrm{Tr}A$ este forma canonică Jordan a matricei A.

3) $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Fix}\, A$.

Propoziţia 2. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice involutivă, atunci:

1) Valorile proprii sunt 1 sau -1.

2) Matricea A este diagonalizabilă, adică există o matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabilă, astfel ca

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right] = J_A,$$

unde k este numărul valorilor proprii egale cu 1, iar J_A este forma canonică Jordan a matricei A.

Propoziţia 3. 1) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice idempotentă, atunci matricea $B = 2A - I_n$ este o matrice involutivă și avem:

$$\mathrm{Fix}\, A = \mathrm{Fix}\, B, \quad \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Inv}\, B$$

unde $\mathrm{Inv}\, B = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid B \cdot Y = -Y\} = \mathrm{Ker}\,(B + I_n)$ este mulțimea punctelor inversabile ale matricei B.

2) Dacă $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice involutivă, atunci $A = \dfrac{1}{2}(I_n + B)$ este o matrice idempotentă și

$$\mathrm{Fix}\, A = \mathrm{Fix}\, B, \quad \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Inv}\, B.$$

Observaţia 4. Orice proiecție determină o simetrie și orice simetrie determină o proiecție, legate prin relațiile:

$$S = 2P - I \quad \text{și} \quad P = \frac{1}{2}(I + S),$$
$$\mathrm{Fix}\, P = \mathrm{Fix}\, S \quad \text{și} \quad \mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Inv}\, S.$$

2. Perechi de matrice idempotente ce realizează partiția unității

Propoziţia 4. Dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt idempotente, atunci matricea $A + B$ este idempotentă dacă și numai dacă

$$A \cdot B = B \cdot A = O_n.$$

Demonstrație. $(A+B)^2 = A+B \iff A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 = A + B$

$$\iff A \cdot B + B \cdot A = 0.$$

Din ultima relație rezultă

$$A \cdot B \cdot A = -B^2 \cdot A = -B \cdot A \text{ și } A \cdot B \cdot A = -A^2 \cdot B = -A \cdot B,$$

deci $A \cdot B = B \cdot A$ și atunci $2A \cdot B = 0$, deci $A \cdot B = B \cdot A = 0$.

Propoziţia 5. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice idempotentă, atunci matricea $B = I_n - A$ este idempotentă și avem

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Fix} B \text{ și } \operatorname{Fix} A = \operatorname{Ker} B.$$

(Se spune că perechea $(A, B) = (A, I_n - A)$ realizează o partiție a unității în matricea idempotentă).

Demonstrație. $B^2 = I_n - 2A + A^2 = I_n - 2A + A = I_n - A = B$.

Avem:

• $X_1 \in \operatorname{Fix} B \iff B \cdot X_1 = X_1 \iff (I_n - A) \cdot X_1 = X_2$

$$\iff A \cdot X_1 = 0 \iff X_1 \in \operatorname{Ker} A$$

• $X_2 \in \operatorname{Ker} B \iff B \cdot X_2 = 0 \iff (I_n - A) \cdot X_2 = 0$

$$\iff A \cdot X_2 = X_2 \iff X_2 \in \operatorname{Fix} A.$$

Observaţia 6. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice involutivă, atunci matricea $B = -A$ este și ea involutivă și avem

$$\operatorname{Fix} B = \operatorname{Inv} A, \operatorname{Inv} B = \operatorname{Fix} A.$$

3. Perechi de matrice idempotente cu același nucleu

Propoziţia 7. Pentru o pereche de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $A \cdot B = A$ și $B \cdot A = B$;

b) $A^2 = A$, $B^2 = B$ și $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$.

Demonstrație. a) $\Rightarrow$ b) Din relația a_1) rezultă $A \cdot B \cdot A = A^2$ și din a_2) rezultă $A \cdot B \cdot A = A \cdot B$, deci $A^2 = A \cdot B = A$ și analog $B^2 = B$.

Din a_2) rezultă $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} B$ și din a_1) rezultă $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} A$.

b) $\Rightarrow$ a) Avem $A^2 = A \iff A \cdot (A - I_n) \cdot X = 0, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$
$\iff (A - I_n) \cdot X \in \operatorname{Ker} A, \forall X \iff (A - I_n) \cdot X \in \operatorname{Ker} B, \forall X$
$\iff B(A - I_n) \cdot X = 0, \forall X \iff B \cdot (A - I_n) = 0 \iff B \cdot A = B$
și analog $A \cdot B = A$.

Observaţia 8. În condițiile Propoziției 7, matricea $A - B$ este nilpotentă, mai exact $(A - B)^2 = O_n$.

4. Perechi de matrice idempotente cu aceeași imagine

Propoziţia 9. Pentru o pereche de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $A \cdot B = B$ și $B \cdot A = A$;

b) $A^2 = A$, $B^2 = B$ și $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$.

Demonstrație. Folosim Propoziția 5.

Fie $C = I_n - A$, $D = I_n - B$. Atunci:

$$A \cdot B = B \iff C \cdot D = C \text{ și } B \cdot A = A \iff D \cdot C = D,$$

astfel că perechea (C, D) verifică condiția a) din Propoziția 7, deci

$$C^2 = C, D^2 = D \text{ și } \operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} D \iff \operatorname{Fix} A = \operatorname{Fix} B \iff \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B.$$

Observația 10. În condițiile Propoziției 9, matricea $A - B$ este nilpotentă, mai exact $(A - B)^2 = O_n$.

5. Perechi de matrice involutive cu aceleași puncte fixe

Propoziția 10. Pentru o pereche de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $A \cdot B + B \cdot A = 2I_n$ și $A \cdot B - B \cdot A = 2(B - A)$;

b) $A^2 = B^2 = I_n$ și $\operatorname{Fix} A = \operatorname{Fix} B$.

Demonstrație. Prin substituțiile inspirate de Propoziția 3:

$$A = 2C - I_n, B = 2D - I_n$$

rezultă

$$C^2 = C, D^2 = D \text{ și } \operatorname{Fix} C = \operatorname{Im} C = \operatorname{Fix} D = \operatorname{Im} D,$$

deci sunt verificate ipotezele din Propoziția 9 pentru perechea (C, D), astfel că rezultă

$$C \cdot D = D \text{ și } D \cdot C = C \iff A \cdot B = I_n + B - A$$

și

$$B \cdot A = I_n + A - B \iff A \cdot B + B \cdot A = 2I_n \text{ și } A \cdot B - BA = 2(B - A).$$

6. Perechi de matrice involutive cu aceleași puncte inversate

Propoziția 11. Pentru o pereche de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $A \cdot B = A - B + I_n$ și $B \cdot A = B - A + I_n$;

b) $A^2 = B^2 = I_n$ și $\operatorname{Inv} A = \operatorname{Inv} B$.

Demonstrație. Cu substituțiile $A = -C$ și $B = -D$, condiția a) devine condiția a) din Propoziția 5.1, și atunci:

$$C^2 = D^2 = I_n \text{ și } \operatorname{Fix} C = \operatorname{Fix} D \iff \operatorname{Inv} A = \operatorname{Inv} B.$$

Observația 12. În condițiile Propoziției 11, rezultă

$$(A - B)^2 = O_n \text{ și } (A \cdot B)^2 + (B \cdot A)^2 = 2I_n.$$

7. Perechi de matrice cu pătratele involutive

Propoziţia 13. (Fuzhen Zhong, [2]) Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt matrice inversabile cu proprietăţile

$$A \cdot B \cdot A = B \text{ și } B \cdot A \cdot B = A,$$

atunci matricele A^2 și B^2 sunt involutive.

Demonstraţie. Avem: $A \cdot B = B \cdot A^{-1}$ și $A \cdot B = B^{-1} \cdot A$, deci

$$B \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot A \iff A^2 = B^2.$$

Apoi

$$A = B \cdot A \cdot B = (A \cdot B \cdot A) \cdot A \cdot B = A \cdot B \cdot A^2 \cdot B = A \cdot B \cdot B^2 \cdot B = A \cdot B^4$$

deci $B^4 = I_n$ și analog $A^4 = I_n$ sau $(A^2)^2 = (B^2)^2 = I_n$.

8. Perechi de matrice cu același rang

Pentru o pereche de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, considerăm afirmaţiile:

A1) $A^2 \cdot B = A$;

A2) $B^2 \cdot A = B$;

A3) $\text{rang}A = \text{rang}B$.

Propoziţia 14. Dacă două din afirmaţiile A1), A2), A3) sunt adevărate, atunci toate trei sunt adevărate.

Demonstraţie.

• A1) și A2) $\Rightarrow$ A3).

Din A1), $\text{rang}A = \text{rang}A^2B \leqslant \text{rang}B$ și din A2), $\text{rang}B \leqslant \text{rang}A$, deci obţinem A3).

• A1) și A3) $\Rightarrow$ A2) (și, analog, A2) și A3) $\Rightarrow$ A1).

Avem $\text{rang}A \geqslant \text{rang}A^2 \geqslant \text{rang}A^2 \cdot B = \text{rang}A$, deci

$$\text{rang}A = \text{rang}A^2 \iff \text{rang}J_A = \text{rang}J_A^2$$

(J_A este forma canonică Jordan a matricei A) $\iff$ J_A nu conţine celule Jordan cu zero pe diagonală de dimensiuni mai mari ca 1. Astfel, există o matrice inversabilă $A_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, unde $k = \text{rang}A$, astfel ca

$$J_A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

(A_1 conţine blocurile Jordan corespunzătoare valorilor proprii nenule).

Dacă $A = P \cdot J_A \cdot P^{-1}$ și $B = P \cdot B_1 \cdot P^{-1}$, relaţia A1) devine

$$J_A^2 \cdot B_1 = J_A \iff \left[\begin{array}{c|c} A_1^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\iff A_1^2 \cdot B_{11} = A_1 \text{și} A_1^2 \cdot B_{12} = 0,$$

deci $B_{11} = A_1^{-1}$ și $B_{12} = 0$, astfel că

$$B_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1^{-1} & 0 \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

și din $\text{rang}B_1 = \text{rang}B = \text{rang}A = k$ rezultă $B_{22} = 0$ și se verifică relația

$$B_1^2 \cdot J_A = B_1 \iff B^2 \cdot A = B.$$

$$(\text{rang}B_1 = \text{rang}\left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array}\right] \cdot B_1 = \text{rang}\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

$$= \text{rang}\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline -B_{21} & I_{n-k} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] = \text{rang}\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right] = k + \text{rang}B_{22}).$$

Observația 15. Dacă în afirmațiile A1), A2), A3) transpunem relațiile date sau trecem la adjuncta hermitiană, obținem afirmațiile:

A1) $B^t \cdot (A^t)^2 = A^t$;
A2) $A^t \cdot (B^t)^2 = B^t$;
A3) $\text{rang}A^t = \text{rang}B^t$

și renotând $A^t = C$, $B^t = D$, obținem afirmațiile:

B1) $D \cdot C^2 = C$;
B2) $C \cdot D^2 = D$;
B3) $\text{rang}C = \text{rang}D$

și propoziția asemănătoare că dacă două din afirmațiile B1), B2), B3) sunt adevărate, atunci toate sunt adevărate.

9. Probleme propuse

Prezentăm câteva probleme care se rezolvă cu ajutorul celor expuse.

Problema 1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca

$$A \cdot B = A \text{ și } B \cdot A = B \text{ (sau} A \cdot B = B \text{ și } B \cdot A = A).$$

Arătați că funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$,

$$f(t) = \text{rang}((1-t)A + tB),\ t \in \mathbb{C}$$

este constantă.

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca

$$A \cdot B + B \cdot A = 2I_n \text{ și } A \cdot B - B \cdot A = 2(A - B).$$

Arătați că funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(t) = \det((1-t)A + tB),\ t \in \mathbb{C}$$

este constantă.

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $(A - I_n)(B + I_n) = O_n$ și $(B - I_n) \cdot A = O_n$;
b) $A^2 = A,\ B^2 = I_n$ și $\text{Fix}\,A = \text{Fix}\,B$.

Bibliografie

[1] V. Pop, *Algebră liniară și geometrie analitică: Probleme pentru seminarii, studiu individual și examen*, Editura Mega, 2012.
[2] F. Zhong, *Linear Algebra: Challenging Problems for Students*, Johns Hopkins University Press, 2009.