Clasa a IX-a

13. Determinați cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii

$$A = \left\{ n + \left[\frac{2021}{n} \right] \mid n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2021\} \right\}.$$

14. Rezolvați ecuația $\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{[x]}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

15. a) Determinați, în funcție de $n \in \mathbb{N}^*$, partea întreagă a numărului $\sqrt{n^2+n}$.

b) Determinați, în funcție de $n \in \mathbb{N}^*$, partea întreagă a numărului $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2$.

c) Calculați $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \ldots + [\sqrt{2020 \cdot 2021}]$.

16. Arătați că pentru orice numere a, b, $c \in (0, \infty)$ avem:

a) $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geqslant a + b + c$;

b) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$.

17. În triunghiul echilateral ABC de latură 10, punctele P și Q împart latura BC în trei părți egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

18. În pătratul $ABCD$ de latură 10, punctele M și N sunt pe latura BC astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{2}$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

Clasa a X-a

19. a) Determinați numerele reale x pentru care este definită expresia

$$\log_{\frac{x-1}{x+1}} \left(\frac{x^2+4}{5x^2-4x-1} \right).$$

b) Dacă $a = \log_3 45$, exprimați în funcție de a numărul $\log_{15} 75$.

20. Comparați numerele $\log_{\frac{1}{2}} 3$ cu $\log_{\frac{1}{4}} 2{,}25$.

21. Arătați că, dacă $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ și $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, atunci $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

22. Determinați perechile de numere reale (x, y) care satisfac simultan relațiile $2^{x+1} = 4y^2 + 1$ și $2^x \leqslant 2y$.

23. a) Demonstrați că, dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$, atunci $\log_a b + \log_b c + \log_c a \geqslant 3$.

b) Demonstrați relația $4 < \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8 < 5$.

24. Arătați că $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[9]{2} \cdot \sqrt[27]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[3^n]{2} < \sqrt{2}$.