PENTRU CERCURILE DE ELEVI

APLICAȚII ALE CONVEXITĂȚII UNEI FUNCȚII ÎN PROBLEME DE EXTREM

GABRIEL BREHUESCU[1)]

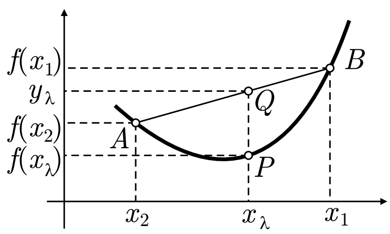
1. INTRODUCERE

O clasă largă de probleme care se bazează pe studiul convexității unor funcții cu mai multe variabile.

Scopul acestei lecții este de a prezenta câteva noțiuni de bază legate de convexitate și aplicații ale acesteia în demonstrarea unor inegalități.

Definiție. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat. O funcție $f : I \to \mathbb{R}$ se numește convexă dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ și orice $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$



Interpretarea geometrică a relației precedente este aceea că, dacă notăm $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $y_\lambda = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, atunci punctul $P(x_\lambda, f(x_\lambda))$ al graficului funcției f este „mai jos” decât punctul $Q(x_\lambda, y_\lambda)$ al coardei cu capetele în $A(x_1, f(x_1))$ și $B(x_2, f(x_2))$; altfel zis:

pentru orice două puncte A, B ale graficului funcției, porțiunea de grafic cuprinsă între A și B este sub coarda AB.

Avem următorul rezultat fundamental.

Teoremă. O funcție $f : I \to \mathbb{R}$, de două ori derivabilă, este convexă dacă și numai dacă $f''(x) \geqslant 0$, pentru orice $x \in I$.

Proprietatea P1. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ și funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, convexă pe intervalul închis $[a,b]$. Atunci $\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\}$.

Demonstrație. Pentru orice $x \in [a,b]$ există $\lambda \in [0,1]$ astfel încât $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Ținând cont de faptul că funcția f este convexă, avem

$$f(x) = f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b), \forall x \in [a,b]. \tag{1}$$

Dacă $f(a) \leqslant f(b)$, atunci avem, conform (1), pentru orice $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leqslant \lambda f(b) + (1-\lambda)f(b) = f(b)$, deci $\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(b)$. Dacă $f(a) > f(b)$ obținem analog $\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$, proprietatea fiind astfel demonstrată. □

Proprietatea anterioară poate fi generalizată astfel.

Proprietatea P1*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, \forall i = \overline{1,n}$. Presupunem că funcția $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de n variabile, unde Ω reprezintă produsul

[1)]Elev, Colegiul Național „Mihai Eminescu“, Botoșani.

cartezian al tuturor intervalelor $[a_i, b_i]$, este reală și convexă în raport cu fiecare variabilă a acesteia. Atunci

$$\max_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{f(c_1, c_2, \dots, c_n) : c_i \in \{a_i, b_i\}\}.$$

Demonstrație. Pentru $n = 1$, **P1*** se reduce la **P1**.

Presupunem acum că **P1*** este adevărată pentru funcțiile de n variabile, convexe în fiecare variabilă, și considerăm $\Omega = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n+1}, b_{n+1}]$ și o funcție $f : \Omega \to \mathbb{R}$, de $n + 1$ variabile, convexă în fiecare variabilă. Fie $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega$. Conform **P1**, pentru $x_1, \dots, x_n$ fixate,

$$\max_{x_{n+1}} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \max\{f(x_1, \dots, x_n, a_{n+1}), f(x_1, \dots, x_n, b_{n+1})\}.$$

Conform ipotezei de inducție,

$$\max_{(x_1,\dots,x_n)} f(x_1, \dots, x_n, a_{n+1}) = \max\{f(c_1, \dots, c_n, a_{n+1}) : c_i \in \{a_i, b_i\}, i = \overline{1, n}\},$$

$$\max_{(x_1,\dots,x_n)} f(x_1, \dots, x_n, b_{n+1}) = \max\{f(c_1, \dots, c_n, b_{n+1}) : c_i \in \{a_i, b_i\}, i = \overline{1, n}\}.$$

Rezultă

$$\max_{(x_1,\dots,x_{n+1})} f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max\{f(c_1, \dots, c_{n+1}) : c_i \in \{a_i, b_i\}, i = \overline{1, n+1}\}$$

și inducția este încheiată.

2. APLICAȚII

1. Fie $a, b, c \in [0, 1]$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+\left(1-\sin\frac{\pi a}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\pi b}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\pi c}{2}\right) \leqslant 1.$$

Soluție. Considerăm funcția $f : [0, 1]^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(a, b, c) = \sum_{\text{sim}} \frac{a}{b+c+1} + \left(1-\sin\frac{\pi a}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\pi b}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\pi c}{2}\right).$$

Deoarece funcțiile $a \mapsto a$, $a \mapsto \dfrac{1}{a+\alpha}, \alpha > 0$, $a \mapsto 1 - \sin \pi a/2$ sunt convexe pe $[0, 1]$ și se înmulțesc cu coeficienți pozitivi, iar suma unor funcții convexe este convexă, deducem că f este convexă.

Astfel, funcția f este convexă relativ la variabila a. Din simetrie, f este convexă și relativ la variabilele b, respectiv c.

Funcția f fiind convexă în fiecare variabilă, conform proprietății 1*, își atinge maximul în unul dintre cele $2^3 = 8$ vârfuri ale domeniului $[0, 1]^3$:

$$\max_{a,b,c\in[0,1]} f(a, b, c) = \max\{f(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1\}\}.$$

Ținând cont de faptul că funcția f este simetrică în a, b, c, iar $f(0, 0, 0) = f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$, rezultă concluzia.

2. Dacă $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*, n > 1$, atunci $\forall x_i \in [a,b], \forall p_i \in \mathbb{R}_+^*, i = \overline{1,n}$ are loc inegalitatea:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2.$$

(Inegalitatea lui Leonid Vitalievici Kantorovici)

Demonstrație. Considerăm funcția $f : [a,b]^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}\right).$$

Prin desfacerea parantezelor obținem o sumă de funcții de același tip cu cele de la aplicația **1**, deci f este convexă în raport cu fiecarea variabilă.

Conform proprietății **1***, f își atinge maximul într-unul dintre vârfurile domeniului. Presupunem că m dintre aceste numere, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$, sunt egale cu a, iar restul de $n-m$ numere sunt egale cu b. Efectuăm notațiile:

$$\alpha = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_m}, \beta = \sum_{\substack{i=1\\ i \neq i_k}}^{n} p_i, k = \overline{1,m}; \alpha + \beta = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Avem astfel:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha a + \beta b)\left(\alpha\frac{1}{a} + \beta\frac{1}{b}\right) = \alpha^2 + \beta^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\alpha\beta =$$

$$= (\alpha+\beta)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)\alpha\beta \leqslant (\alpha+\beta)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)\frac{(\alpha+\beta)^2}{4} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) = \frac{(a+b)^2}{4ab}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i.\right)^2,$$

ceea ce încheie demonstrația.

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1,2]$. Demonstrați că

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^2 \leqslant n^3.$$

(Propusă de d-l prof. Laurențiu Panaitopol)

O variantă mai generală a acestei probleme este aceea a d-lui prof. Gheorghe Szöllösy, propusă în Gazeta Matematică în anul 1981:

Demonstrați că

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{ab} \leqslant \left(\frac{a+b}{1+ab} \cdot n\right)^{1+ab},$$

unde $x_i \in [a,b], \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ iar $a, b \in \mathbb{N}^*, a < b, ab \in \mathbb{N}^*$.

La rândul ei, și această problemă se poate generaliza la:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}\right)^{ab} \leqslant \left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^{1+ab}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^{1+ab},$$

$\forall x_i \in [a,b], \forall p_i \in \mathbb{R}_+^*, i=\overline{1,n}$ (propusă de d-l prof. D.M. Bătinețu-Giurgiu)

Vom aborda cea din urmă problemă. Considerăm funcția $f:[a,b]^n \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}\right)^{ab}.$$

Atunci, derivând în raport cu a_k,

$$f'_{a_k}(a_1,a_2,\ldots,a_n) = p_k\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}\right)^{ab-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i} - \frac{ab}{a_k^2}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)$$

$$f''_{a_k}(a_1,a_2,\ldots,a_n) = p_k\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}\right)^{ab-2}\left[\frac{ab(ab-1)p_k}{a_k^4}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}\right) \cdot \left(\frac{2ab}{a_k^3}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i - \frac{2abp_k}{a_k^2}\right)\right] > 0,$$

unde $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Astfel, funcția f este convexă în raport cu fiecare variabilă. Conform proprietății **1***, funcția f își atinge maximul într-unul dintre vârfurile domeniului $[a,b]^n$. Considerăm că m dintre aceste numere, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$, sunt egale cu a, iar restul de $n-m$ numere sunt egale cu b. Efectuând notațiile

$$\alpha = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_m}, \beta = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_k}}^{n} p_i, k=\overline{1,m}; \alpha+\beta = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

obținem

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (\alpha a + \beta b)\left(\alpha\frac{1}{a} + \beta\frac{1}{b}\right)^{ab}.$$

Cum ambele paranteze sunt strict pozitive, aplicând inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică obținem

$$\sqrt[1+ab]{(\alpha a + \beta b)\left(\alpha\frac{1}{a} + \beta\frac{1}{b}\right)^{ab}} \leqslant \frac{(\alpha a + \beta b) + ab\left(\alpha\frac{1}{a} + \beta\frac{1}{b}\right)}{1+ab} =$$

$$= \frac{a+b}{1+ab}(\alpha+\beta) = \frac{a+b}{1+ab}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right),$$

de unde

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\alpha a+\beta b)\left(\alpha\frac{1}{a}+\beta\frac{1}{b}\right)^{ab}\leqslant\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^{1+ab}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^{1+ab},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Egalitatea este atinsă dacă $x_i\in\{a,b\}$ și $\exists X\subset\{1,2,\ldots,n\}, X\neq\emptyset$ astfel încât:

$$\sum_{p_i\in X}p_i=\sum_{p_i\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus X}p_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}p_i.$$

Remarcă: Atât inegalitatea propusă de d-l Gh. Szöllösy, cât și generalizarea acesteia pot fi demonstrate folosind metode elementare bazate pe semnul funcției de gradul al doilea și inegalitatea mediilor (a se vedea [3]). Astfel, în ciuda faptului că metoda prezentată în această lecția este una cu baze solide, în unele cazuri aplicarea acesteia poate duce la soluții complicate. Cu toate acestea, metoda îmbină noțiuni interesante care nu pot decât să contribuie la dezvoltarea matematică a cititorilor.[1)]

3. Probleme propuse

1. Demonstrați că $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\leqslant\dfrac{5}{3}$, pentru orice $a,b,c\in[1,2]$.

2. Dacă $n\geqslant 2$ este număr natural, $u_i,v_i,a_i,b_i\in(0,\infty)$, $a_i<b_i, i=\overline{1,n}$ sunt constante reale și dacă $x_i\in[a_i,b_i], \forall i=\overline{1,n}$, atunci numărul

$$E(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}u_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i}{x_i}\right)$$

este maxim dacă și numai dacă $x_i\in\{a_i,b_i\}$.

Bibliografie

[1] [GhA] Gh. Andrei, I. Cucurezeanu, C. Caragea, Gh. Bordea, *Probleme de algebră pentru concursuri de admitere și olimpiade școlare*, Editura Didactică și Pedagogică București, 1993.

[2] [4] D.M Bătinețu-Giurgiu, *În legătură cu inegalitatea lui L.V. Kantorovici*, G.M-B 2/1994.

[3] [5]D.M Bătinețu-Giurgiu, *O demonstrație simplă a inegalității lui L.V. Kantorovici*, G.M-B 2/1998.

[4] [1] V. Pop, Gh. Mușuroia, *Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență*, Editura Paralela 45, 2016, Capitolul 8.

[5] [2] M. N. Roșculeț, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică București, Paginile 277-278.

[1)]**Nota redacției.** Ca exemplu, recomandăm și parcurgerea rezolvării problemei 2 de la Olimpiada Internațională de Matematică 2021, prezentate, de asemenea, în acest număr al revistei.