TREI INEGALITĂŢI GEOMETRICE, TREI METODE DE REZOLVARE

Andreea Dima[1)]

Rezolvarea inegalităţilor geometrice este, întotdeauna, o provocare. Alegerea metodei (sau metodelor) de abordare ţine de intuiţia fiecăruia, dar şi de experienţă. Voi ilustra această afirmaţie prezentând trei inegalităţi geometrice pe care le-am întâlnit în perioada nu prea îndepărtată când eram elevă. Tehnicile de rezolvare sunt diferite: manipulare de expresii, cunoaşterea unor relaţii „clasice”, construcţie de puncte ajutătoare, respectiv utilizarea numerelor complexe.

1) Profesor,

Problema 1. În [1], se propune spre rezolvare următoarea problemă.

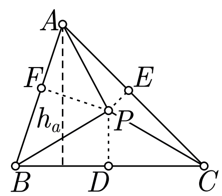
Fie ABC un triunghi oarecare înscris într-un cerc de rază egală cu 1. Arătaţi că, pentru orice punct P din interiorul triunghiului ABC,

$$PA + PB + PC \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} AB \cdot BC \cdot CA.$$

Soluţie. În [3] se demonstrează următoarea

Lemă. *Cu notaţiile uzuale, pentru orice punct P din interiorul triunghiului ABC avem*

$$PA + PB + PC \geqslant 6r.$$



Pentru completitudinea expunerii, prezint demonstraţia lemei. Fie PD, PE, PF distanţele de la P la laturi. Este evident că $h_a \leqslant PA + PD$ şi analoagele. Conform inegalităţii Erdös - Mordell, avem $2(PD+PE+PF) \leqslant PA + PB + PC$. Rezultă

$$h_a+h_b+h_c \leqslant PA+PB+PC+PD+PE+PF \leqslant \frac{3}{2}(PA+PB+PC). \quad (1)$$

Pe de altă parte, din inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică,

$$h_a + h_b + h_c = 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 2S\frac{9}{a+b+c} = \frac{9S}{p} = 9r. \qquad (2)$$

Combinând (1) şi (2) rezultă concluzia lemei. □

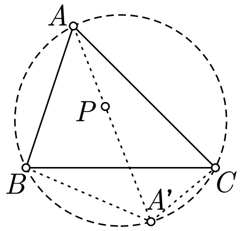
Revenind la problemă, observăm că, în baza lemei, este suficient să dovedim că $6r\sqrt{3} \geqslant abc$. Deoarece $abc = 4RS = 4S$ şi $r = \dfrac{S}{p}$, este suficient să demonstrăm că $a + b + c \leqslant 3\sqrt{3}$.

Aceasta rezultă imediat din proprietatea: *dintre toate triunghiurile înscrise într-un cerc dat, cel de perimetru maxim este cel echilateral.*

Problema 2. *Fie ABC un triunghi şi P un punct în interiorul său. Demonstraţi că*

$$AB\big(\sin\widehat{CAP} + \sin\widehat{CBP}\big) + BC\big(\sin\widehat{ABP} + \sin\widehat{ACP}\big)$$
$$+CA\big(\sin\widehat{BCP} + \sin\widehat{BAP}\big) \leqslant AB + BC + CA.$$

Soluţie. Fie A' intersecţia lui AP cu cercul circumscris $\triangle ABC$. Atunci $BA' = 2R\sin\widehat{BAP}$, $CA' = 2R\sin\widehat{CAP}$.



Aplicând teorema lui Ptolemeu în patrulaterul inscriptibil $ABA'C$ obţinem $AC \cdot BA' + AB \cdot CA' = AA' \cdot BC$, sau

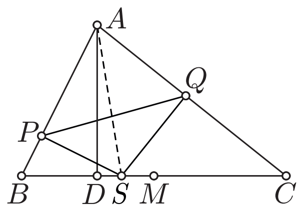
$$AC \cdot 2R \sin \widehat{BAP} + AB \cdot 2R \sin \widehat{CAP} = AA' \cdot BC.$$

Dar $AA' \leqslant 2R$, deci

$$AC \sin \widehat{BAP} + AB \sin \widehat{CAP} \leqslant BC.$$

Analog se demonstrează alte două inegalităţi. Însumându-le, obţinem concluzia.

Problema 3. *Fie ABC un triunghi, D piciorul înălţimii din A şi M mijlocul laturii BC. Fie S un punct pe segmentul închis DM şi fie P, Q proiecţiile lui S pe AB, respectiv AC. Demonstraţi că lungimea segmentului PQ este mai mică sau egală decât un sfert din perimetrul triunghiului ABC.*



Soluţie. Patrulaterul $APSQ$ fiind inscriptibil, cu AS diametru, avem

$$PQ = AS \sin \widehat{BAC} = AS \cdot \frac{BC}{2R} \leqslant AM \cdot \frac{BC}{2R}.$$

Astfel, pentru a demonstra inegalitatea cerută este suficient (şi necesar! – de ce?) să arătăm că $AM \cdot BC \leqslant Rp$, unde am folosit notaţiile uzuale.

Vom demonstra ultima inegalitate folosind numere complexe. Alegem originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi notăm cu x afixul punctului X, oricare ar fi punctul X în planul triunghiului ABC.

Avem $|a| = |b| = |c| = R$ şi $m = \dfrac{b+c}{2}$, deci $AM = \dfrac{|2a-b-c|}{2}$. Astfel, inegalitatea de demonstrat revine la

$$R(|a-b| + |b-c| + |c-a|) \geqslant |(b-c)(2a-b-c)|\,.$$

Deoarece membrul stâng este

$$\begin{aligned} |a-b|\,|b| + |b-c|\,|a| + |c-a|\,|c| &\geqslant \left|ab - b^2 + ab - ac + c^2 - ac\right| \\ &= |(b-c)(2a-b-c)|\,, \end{aligned}$$

rezolvarea problemei este încheiată.

Bibliografie

[1] C. Lupu, *Asupra unei inegalităţi condiţionate*, Revista Recreaţii Matematice, 1/2004.
[2] A. Dima, *Problema S:L:18.249*, Suplimentul G.M.-B, 10/2018.
[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, *Inequalities-A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhäuser Verlag AG, 2009, p. 165.
[4] A. Zahariuc, *Problem 1*, The 2016 Danube Mathematical Competition.