Clasa a IX-a

13. Calculaţi $S = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+\ldots+2020)$.

14. Dacă a, b, c sunt numere reale distincte, astfel încât

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

calculaţi $\dfrac{a}{(b-c)^2} + \dfrac{b}{(c-a)^2} + \dfrac{c}{(a-b)^2}$.

15. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$[x-1] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{2x-1}{2}.$$

16. Arătaţi că suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex nu depinde de numărul de laturi ale poligonului.

17. Ştiind că $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right), b \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ şi $\sin a = \dfrac{3}{5}, \cos b = -\dfrac{4}{5}$, calculaţi $\operatorname{tg}(2a+b)$.

18. Arătaţi că, dacă a, b, c, a', b', c' sunt lungimile laturilor triunghiurilor ΔABC, respectiv $\Delta A'B'C'$ şi dacă avem relaţia

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')},$$

atunci triunghiurile sunt asemenea.

Clasa a X-a

19. a) Arătaţi că, oricare ar fi un număr natural nenul n, există două numere întregi a_n, b_n, astfel încât $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

b) Arătaţi că există a şi b, numere întregi, astfel încât

$$0 < a + b \cdot \sqrt{2} < \frac{1}{2020}.$$

20. Rezolvaţi ecuaţia

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} + \ldots + \sqrt{x+2018} - \sqrt{x+2019}$$
$$= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \ldots + \sqrt{2019} - \sqrt{2020}$$

21. a) Reprezentaţi în plan mulţimile $D_1 = \left\{M(z) \mid |z+3+i| \leqslant \sqrt{2}\right\}$ şi $D_2 = \left\{M(z) \mid |z+1+3i| \leqslant \sqrt{2}\right\}$, unde z este un număr complex.

b) Arătaţi că există un singur număr complex z care verifică relaţiile $|z+3+i| \leqslant \sqrt{2}$ şi $|z+1+3i| \leqslant \sqrt{2}$.

22. Fie un număr complex $z = \cos t + i \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Arătaţi că, dacă $\dfrac{t}{\pi} \in \mathbb{Q}$, atunci există o infinitate de numere naturale n pentru care $z^n = 1$.