APLICAŢII ALE TEOREMEI TRANSVERSALEI

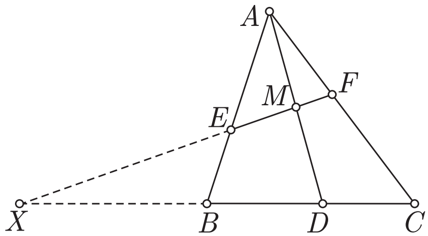
Traian Preda[1)]

În prezenta lecţie vom da soluţii alternative ale unor probleme de geometrie plană, folosind teorema transversalei şi reciproca sa. Enunţul teoremei este următorul.

[1)] Profesor, Colegiul Naţional „Grigore Moisil “, Bucureşti.

Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$, $M \in (AD)$. Atunci M este situat pe EF dacă şi numai dacă

$$DC \cdot \frac{EB}{EA} + BD \cdot \frac{CF}{FA} = BC \cdot \frac{MD}{MA}.$$



Demonstraţie. „$\Rightarrow$” Dacă $EF \parallel BC$, atunci $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{FC}{FA} = \dfrac{MD}{MA}$ şi relaţia se reduce la $DC + BD = BC$ – evident.

În caz contrar, fie X intersecţia dreptelor EF şi BC. Folosind teorema lui Menelaus în triunghiurile ABD şi ACD, cu transversala EF, obţinem

$$\frac{EA}{EB} \cdot \frac{XB}{XD} \cdot \frac{MD}{MA} = 1, \quad \frac{FA}{FC} \cdot \frac{XC}{XD} \cdot \frac{MD}{MA} = 1,$$

de unde

$$\frac{EB}{EA} = \left(1 \mp \frac{DB}{XD}\right) \frac{MD}{MA}, \quad \frac{CF}{FA} = \left(1 \pm \frac{CD}{XD}\right) \frac{MD}{MA}$$

(semnele se corespund). Înmulţind ultimile două egalităţi cu CD, respectiv BD şi adunând obţinem concluzia.

„$\Leftarrow$” Fie M' intersecţia dreptelor AD şi EF. Atunci, folosind afirmaţia directă, punctul M' împarte segmentul (AD) în acelaşi raport ca punctul M, deci coincide cu acesta.

Cazuri particulare importante

Fie triunghiul ABC şi punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$. Dacă notăm $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ şi G, I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în triunghiului ABC, atunci:

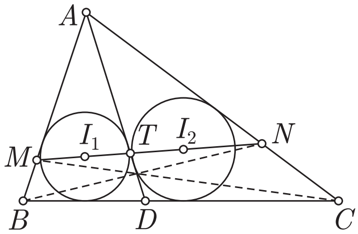
a) $G \in (EF) \iff \dfrac{EB}{EA} + \dfrac{CF}{FA} = 1$;

b) $I \in (EF) \iff b\dfrac{EB}{EA} + c\dfrac{CF}{FA} = a$.

Aplicaţii

A1. (Mediterranean Mathematics Olympiad, 2011) Fie ABC un triunghi şi D piciorul bisectoarei din A; M şi N sunt punctele în care dreapta centrelor cercurilor înscrise în triunghiurile ABD şi ACD intersectează laturile AB şi AC.

Atunci segmentele BN şi CM se intersectează pe bisectoarea AD.



Soluţie. Vom considera cazul mai general $D \in (BC)$ şi vom arăta că AD, BN, CM sunt concurente dacă şi numai dacă AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

Din teorema lui Ceva avem că AD, BN, CM sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1. \tag{*}$$

Fie I_1, I_2 centrele cercurilor înscrise în ΔABD, respectiv ΔADC. Din consecinţa b) rezultă că

$$I_1 \in (MN) \iff AD \cdot \frac{BM}{MA} + AB \cdot \frac{TD}{TA} = BD \iff \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BD - xAB},$$

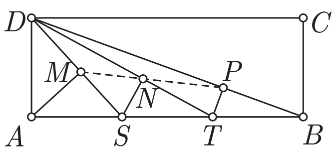
$$I_2 \in (MN) \iff AD \cdot \frac{CN}{NA} + AC \cdot \frac{TD}{TA} = DC \iff \frac{CN}{NA} = \frac{DC - xAC}{AD},$$

unde $x = TD/TA$. Avem astfel

$$(^*) \iff \frac{AD}{BD - xAB} \cdot \frac{CD - xAC}{AD} \cdot \frac{BD}{CD} = 1 \iff xAC \cdot BD = xAB \cdot CD$$
$$\iff \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC},$$

ceea ce este echivalent cu faptul că AD este bisectoarea $\sphericalangle BAC$.

A2. (Gabriel Popa, O.N.M. 2013) Pe latura AB a dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctele S şi T astfel încât $AS = ST = TB$. Notăm cu M, N şi P proiecţiile punctelor A, S, respectiv T pe dreptele DS, DT, respectiv DB. Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare dacă şi numai dacă $15AD^2 = 2AB^2$.



Soluţie. Notăm $AB = 3a$, $AD = b$. Din teorema trasversalei avem

$$M, N, P \text{ coliniare} \iff \frac{SM}{MD} + \frac{BP}{PD} = 2\frac{NT}{DN}. \tag{**}$$

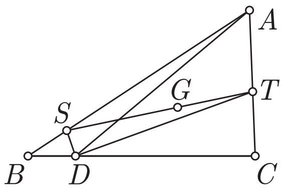
Folosind teorema lui Pitagora şi $\triangle SAM \sim \triangle SDA$, $\triangle TSN \sim \triangle TDA$, $\triangle BTP \sim \triangle BDA$ obţinem

$$\frac{SM}{MD} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{NT}{DN} = \frac{2a^2}{2a^2+b^2}, \quad \frac{BP}{PD} = \frac{3a^2}{6a^2+b^2}.$$

Înlocuind în (**) şi efectuând calculele obţinem: (**) $\iff a^2 = 5b^2 \iff 15AD^2 = 2AB^2$.

A3. (Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, G.M.9/2019) Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate, D un punct pe BC şi S piciorul bisectoarei din D în triunghiul ADB. Dreapta SG taie latura AC în punctul T. Să se arate că $AD = BC$ dacă şi numai dacă $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$.

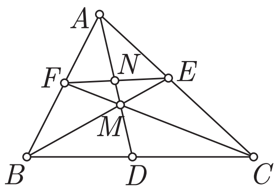
Soluţie. Condiţia $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$ este echivalentă cu $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AT}{TC}$, iar ipoteza este echivalentă cu $\dfrac{BS}{AS} + \dfrac{CT}{TA} = 1$ (cazul particular b)).



Aceasta este echivalent cu $\dfrac{BS}{AS} + \dfrac{DC}{AD} = 1$, sau $\dfrac{BD}{AD} + \dfrac{DC}{AD} = 1$, adică $BC = AD$.

A4. (Baraj 1, OBMJ, 2012) În triunghiul ABC se consideră punctele $D \in (BC)$ şi $M \in (AD)$. Notăm intersecţia dreptelor BM şi AC cu E, intersecţia dreptelor CM şi AB cu F, iar intersecţia dreptelor EF şi AD cu N. Demonstraţi că

$$\frac{AN}{DN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{DM}.$$



Soluţie. Din teorema transversalei avem

$$DC\frac{BF}{FA} + BD\frac{CE}{EA} = BC\frac{DN}{NA},$$

sau

$$\frac{DC}{BC} \cdot \frac{BF}{FA} + \frac{BD}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{DN}{NA}. \qquad (***)$$

Din teorema lui Menelaus în $\triangle ADC$ cu transversala $B - M - E$ şi în $\triangle ADB$ cu transversala $C - M - F$ avem

$$\frac{DC}{BC} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{DM}{MA}, \quad \frac{BD}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{DM}{MA}.$$

Înlocuind în (***) rezultă relaţia dorită.

Bibliografie

[1] A. Bălăucă, *Olimpiadă, concursuri şi centre de excelenţă*, Editura Taida, 2016.
[2] A. Bălăucă, *Olimpiadele naţionale ale României şi Republicii Moldova – olimpiadele balcanice pentru juniori (OBMJ)*, Editura Taida, 2013.
[3] Ionuţ Onişor, 170 *de probleme de geometrie*, Matrix Rom, 2012.
[4] Romanian Mathematical Competitions.