Clasa a IX-a

13. Demonstraţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{3n+1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2n-1}{2}.$$

14. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x^2+3x+2)(x^2-5x+6)=12$.

15. Se consideră ecuaţia $x^2 - \left(2m^2+1\right)x + m^4 = 0$, unde $m \in \mathbb{R}^*$. Arătaţi că ecuaţia are două rădăcini reale, pozitive şi distincte $x_1 < x_2$ şi că în intervalul (x_1, x_2) se află cel mult un pătrat perfect.

16. Arătaţi că

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ şi apoi calculaţi $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\cos 2a = \frac{7}{25}$.

17. Calculaţi $S = \sin 1^\circ \cos 29^\circ + \sin 2^\circ \cos 28^\circ + \cdots + \sin 29^\circ \cos 1^\circ$.

18. Demonstraţi că în orice triunghi ABC avem $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$.

Clasa a X-a

19. Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(2,1)$ şi $C(5,1)$.

a) Determinaţi lungimea înălţimii din A a triunghiului ABC.

b) Determinaţi ecuaţia medianei din A a triunghiului ABC.

c) Calculaţi aria triunghiului ABC.

d) Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi este paralelă cu dreapta AB.

e) Scrieţi ecuaţia înălţimii din C a triunghiului ABC.

20. Calculaţi sumele :

a) $S_1 = C_{2020}^0 + 5C_{2020}^1 + 25C_{2020}^2 + \ldots + 5^{2020}C_{2020}^{2020}$.

b) $S_2 = \frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $S_3 = 1 + C_{2020}^1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + C_{2020}^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + C_{2020}^3 \cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + \ldots + C_{2020}^{2020} \cos\left(\frac{2020\pi}{3}\right)$.