LOCUL GEOMETRIC AL UNUI PUNCT DE CONCURENŢĂ DIN TRIUNGHI

Petru Braica[1)], Mircea Fărcaş[2] şi Daly Marciuc[3]

Abstract. In this note, we find the locus of the generalized Torricelli-Fermat point.

Keywords: hyperbola, generalized Torricelli-Fermat point

MSC: 51M04, 51M25, 51M30

În articolele [3] şi [4], considerând un triunghi ABC, se rotesc vârfurile B şi C în jurul lui A înspre exteriorul triunghiului cu acelaşi unghi α, obţinându-se punctele B' şi respectiv C'. Dreptele CB' şi BC' se intersectează în punctul P_A. Analog se obţin punctele P_B şi P_C. În materialele sus-citate se demonstrează că dreptele AP_A, BP_B şi CP_C se intersectează într-un punct T_α, care generalizează punctul Torricelli-Fermat, acesta obţinându-se pentru $\alpha = 60°$.

1) Prof. dr., Şcoala Gimnazială „Grigore Moisil“ Satu Mare

2) Prof. dr., Şcoala Gimnazială „Mihai Eminescu“ Satu Mare

3) Prof. dr., Şcoala Gimnazială „Mihai Eminescu“ Satu Mare.

Ne-am pus problema determinării locului geometric al punctului T_α atunci când α variază de la 0° la 360° şi, cu ajutorul aplicaţiei Geogebra, acesta părea să fie o hiperbolă, pentru un triunghi scalen.

Pentru început, vom reaminti câteva lucruri referitoare la conice. Ecuaţia generală a unei conice este dată de

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \tag{1}$$

unde $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. Invarianţii unei conice sunt $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ şi $I = a_{11} + a_{22}$. Valorile acestor invarianţi determină tipul conicei.

Astfel, dacă $\Delta = 0$, avem trei cazuri: $\delta > 0$, când conica se reduce la un punct, $\delta = 0$, când conica se reduce la o pereche de drepte paralele sau confundate şi $\delta < 0$, când conica se reduce la o pereche de drepte concurente. În acest ultim caz, dacă $I = 0$, cele două drepte sunt perpendiculare.

Dacă $\Delta \neq 0$, avem trei cazuri: $\delta > 0$, când conica este o elipsă (dacă $I \cdot \Delta < 0$) sau mulţimea vidă (dacă $I \cdot \Delta > 0$), $\delta = 0$, când conica este o parabolă şi $\delta < 0$, când conica este o hiperbolă. În acest ultim caz, dacă $I = 0$, avem o hiperbolă echilateră. ([2], pp. 441-447).

Vom obţine în continuare ecuaţia acestui loc geometric într-un sistem de coordonate xOy convenabil ales.

Teoremă. Dacă a, b şi c sunt numere reale, cu $a < b$ şi $c > 0$, considerăm punctele $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ şi $C(0, c)$ astfel încât triunghiul ABC să fie scalen. Ecuaţia locului geometric al punctului T_α este

$$\begin{aligned} c(a+b)x^2 + 2(a^2+b^2-c^2-ab)xy - c(a+b)y^2 - c(a+b)^2x \\ +(a+b)(c^2-ab)y + abc(a+b) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Demonstraţie. Afixul punctului de concurenţă a trei ceviene AA', BB' şi CC' este dat de egalitatea

$$t = \frac{ma + nb + pc}{m + n + p},$$

unde a, b şi c sunt afixele vârfurilor A, B, respectiv C, iar

$$m = \frac{BA'}{A'C}, \quad n = \frac{CB'}{B'A}, \quad p = \frac{AC'}{C'B}.$$

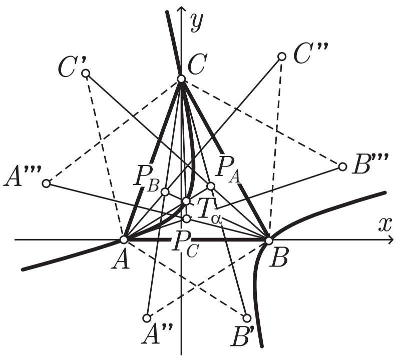
Dar

$$m = \frac{\sin C \sin(B+\alpha)}{\sin B \sin(C+\alpha)}, \quad n = \frac{\sin A \sin(C+\alpha)}{\sin C \sin(A+\alpha)}, \quad p = \frac{\sin B \sin(A+\alpha)}{\sin A \sin(B+\alpha)}.$$

Rezultă astfel coordonatele punctului T_α:

$$\begin{cases} x(\alpha) = \dfrac{(a+b)(ab+c^2)\sin\alpha + c(a^2-b^2)\cos\alpha - c(a^2-b^2)}{2(a^2+b^2+c^2-ab)\sin\alpha + 2c(a-b)\cos\alpha - 4c(a-b)} \\ y(\alpha) = \dfrac{c(a-b)^2\sin\alpha + (a-b)(ab+c^2)\cos\alpha - (a-b)(c^2-ab)}{2(a^2+b^2+c^2-ab)\sin\alpha + 2c(a-b)\cos\alpha - 4c(a-b)}. \end{cases} \tag{3}$$

Eliminând parametrul α, obţinem ecuaţia din teoremă.



Consecinţă. Locul geometric (2) este o hiperbolă echilateră care trece prin vârfurile triunghiului.

Demonstraţie. Invarianţii conicei sunt: $\Delta = \frac{1}{4}c(a-b)^2(a+b)(2ab+c^2-b^2)(2ab+c^2-a^2)$, $\delta = -c^2(a+b)^2 - (a^2+b^2-c^2-ab)^2$ şi $I = c(a+b) - c(a+b) = 0$. Se observă că pentru un triunghi oarecare, avem $\Delta \neq 0$ şi $\delta < 0$, de unde concluzia. $\square$

Animaţia care ilustrează acest loc geometric poate fi găsită la adresa https://www.geogebratube.org/student/mJ4KHBYV0.

Observaţia 1. În cazul triunghiului isoscel, avem $b = -a$, $c \neq -a\sqrt{3}$ şi rezultă $x(\alpha) = 0$, locul geometric fiind axa Oy. Dacă triunghiul este echilateral, deci $b = -a$, $c = -a\sqrt{3}$, rezultă $x(\alpha) = 0$ şi $y(\alpha) = -\frac{a\sqrt{3}}{3}$, deci locul geometric este centrul triunghiului.

Observaţia 2. Pentru $\alpha = 60^\circ$, din (3) se obţin coordonatele punctului lui Torricelli de speţa întâi, iar pentru $\alpha = -60^\circ$, coordonatele punctului lui Torricelli de speţa a doua.

BIBLIOGRAFIE

[1] Dorin Andrica, Nicolae Bişboacă, *Numere complexe. Probleme rezolvate din manualele alternative*, Ed. Millenium, 2000.

[2] Dorin Andrica şi col., *Matematica de bază*, Ed. Studium, Cluj-Napoca, 2001.

[3] Petru Braica, Andrei Bud, *O generalizare a punctului izogon*, G.M.-B, nr. 4/2013.

[4] Petru Braica, Ovidiu Pop, *O extindere a teoremei lui Torricelli*, G.M.-B, nr. 5/2012.