ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA TEOREMEI COSINUSULUI

Neculai Roman[1)]

Abstract. The starting point of this article is represented by [1]. Inspired by this, we put toghether facts which could be considered as a proof for the well-known cosine theorem

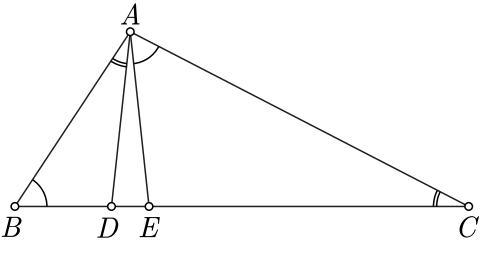
Keywords: metrical relations in a triangle, cosine rule

MSC: 51M04

Acest articol urmăreşte deducerea teoremei cosinusului pe o cale mai puţin uzuală, folosind câteva construcţii auxiliare.

Prima demonstraţie

Considerăm triunghiul ABC şi punctele $D \in [CB$, $E \in [BC$, astfel încât $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ABC$.



Observăm că: segmentele orientate $\overline{DE}$ şi $\overline{BC}$ au aceeaşi orientare $\iff$ $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CAE \leqslant \sphericalangle BAC \iff \sphericalangle BAC \geqslant 90^\circ$.

Apoi, observăm că $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BAC = \sphericalangle AEC$, deci triunghiul ADE este isoscel (eventual, degenerat, dacă $\sphericalangle BAC = 90^\circ$), cu $AD = AE$. Deducem

$$DE = 2AD\cos\sphericalangle ADE = \begin{cases} 2AD\cos(180^\circ - \sphericalangle BAC), \text{dacă } \sphericalangle BAC \geqslant 90^\circ \\ \quad 2AD\cos(\sphericalangle BAC) \qquad\quad , \text{dacă } \sphericalangle BAC \leqslant 90^\circ. \end{cases}$$

[1)] Profesor, Şcoala Gimnazială „Vasile Alecsandri“, Mirceşti, Iaşi.

Astfel, dacă alegem $\overline{BC}$ ca orientare de referinţă,

$$\overline{DE} = -AD \cos \sphericalangle ABC.$$

Din $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ obţinem

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DA} = \frac{BC}{BA},$$

de unde

$$BD = \frac{AB^2}{BC}, \quad AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}.$$

Analog obţinem,

$$CE = \frac{AC^2}{BC}.$$

Rezultă, ţinând cont şi de orientare,

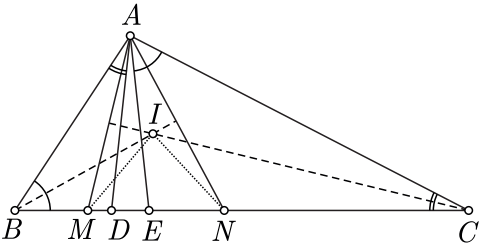
$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EC} = \frac{AB^2}{BC} - 2\frac{AB \cdot AC}{BC} \cos \sphericalangle BAC + \frac{AC^2}{BC},$$

de unde

$$BC^2 = AB^2 - 2AB \cdot AC \cos \sphericalangle BAC + AC^2.$$

A doua demonstraţie

În figura iniţială considerăm şi punctele $M \in [CB$, $N \in [BC$, astfel încât $CM = AC$, $BN = AB$.



Deoarece triunghiul ACM este isoscel cu $CA = CM$,

$$\sphericalangle CAM = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ACB) = \frac{1}{2}(\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC) = \frac{1}{2}(\sphericalangle CAB + \sphericalangle CAE),$$

deci $[AM$ este bisectoarea unghiului (eventual, degenerat) $\sphericalangle BAE$. Analog, $[AN$ este bisectoarea $\sphericalangle CAD$.

Dacă luăm centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC, atunci el se află pe bisectoarele $[BI$ şi $[CI$ ale triunghiurilor isoscele ABN şi ACM, deci pe mediatoarele segmentelor AN şi AM. Astfel, I este centrul cercului circumscris triunghiului AMN. Folosind unghiuri orientate avem

$$\widehat{MAN} = \widehat{MAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAN} = \frac{1}{2}\widehat{EAB} + \widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{CAD}$$
$$= \frac{1}{2}(\widehat{EAC} + \widehat{CAB}) + \widehat{BAC} + \frac{1}{2}(\widehat{CAB} + \widehat{BAD}) = \frac{1}{2}(B + C),$$

deci, în triunghiul AMN, $\sphericalangle MIN = 2\sphericalangle MAN = B + C$.

Din triunghiul isoscel MIN,

$$MN = 2r\,\mathrm{tg}\frac{\sphericalangle MIN}{2} = 2r\,\mathrm{ctg}\frac{A}{2},$$

unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC.

Dar, $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{bc\sin A}{a+b+c}$. Prin urmare,

$$MN = \frac{2bc\sin A}{a+b+c}\mathrm{ctg}\frac{A}{2} \iff MN = \frac{4bc\cos^2\dfrac{A}{2}}{a+b+c}$$

Cum

$$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CB} + \overline{BN} = b - a + c,$$

obţinem

$$(b+c)^2 - a^2 = 4bc\cos^2\frac{A}{2} \iff b^2 + c^2 - a^2 = 4bc\cos^2\frac{A}{2} - 2bc$$

$$\iff b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A \iff a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Bibliografie

[1] M. Mihalache, *Asupra teoremei lui Pitagora*, G.M.–B nr. 5/2016.