ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

STUDIUL CONVERGENŢEI UNOR ŞIRURI RECURENTE

Dumitru Popa[1)]

Abstract. In this note we find, under natural assumptions on the sequence $(a_n)_{n\geq k}$, the asymptotic behaviour of the sequence $(x_n)_{n\geqslant k}$ defined by $x_k > 0$ and $x_{n+1} = x_n + \frac{a_n}{x_n^p}$, $\forall\, n \geqslant k$, where $p > 0$ is a real number. In our study the Stolz-Cesàro lemma has an essential role.

Keywords: recurrent sequences, Stolz-Cesàro lemma

MSC: Primary 26A06, 26A09

În această notă studiem convergenţa unor şiruri definite recurent. În studiul nostru lema *Stolz-Cesàro* are un rol esenţial. Rezultatul principal al acestei lucrări este teorema 2. Ea extinde teorema 1 din [1]. Să reamintim că lema *Stolz-Cesàro* afirmă că dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri de numere reale astfel încât $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir strict crescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ există în $\mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ există şi este egală cu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

Vom avea nevoie în continuare de următorul rezultat binecunoscut. Pentru completitudine vom da şi o demonstraţie a sa.

Propoziţia 1. *Fie $p > 0$ un număr real.*

(i) *Pentru orice $t > 0$ este adevărată inegalitatea*

$$(1+t)^{p+1} > 1 + (p+1)\,t.$$

(ii) *Pentru orice $x > 0$, $y > 0$ este adevărată inegalitatea*

$$(x+y)^{p+1} > x^{p+1} + (p+1)\,x^p y.$$

[1)]Prof. univ. dr., Facultatea de matematică şi informatică, Universitatea „Ovidius“ din Constanţa

Demonstraţie. (i) Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = (1+t)^{p+1} - 1 - (p+1)\,t$. Atunci $f'(t) = (p+1)\,[(1+t)^p - 1]$. Avem $f'(t) = 0$ dacă şi numai dacă $(1+t)^p = 1$, de unde, prin logaritmare, $p \ln (t+1) = 0$, $\ln (t+1) = 0$, $t = 0$. Cum pe intervalul $(0, \infty)$ derivata nu se anulează, ea are semn constant. Din $f'(1) = (p+1)\,(2^p - 1) > 0$ (deoarece $p > 0$), rezultă ca funcţia f are derivata pozitivă în orice punct, deci este strict crescătoare. Cum $f(0) = 0$, rezultă că $f(t) > 0$, $\forall t > 0$, $(1+t)^{p+1} > 1 + (p+1)\,t$, $\forall t > 0$.

(ii) Din (i), pentru $t = \dfrac{y}{x} > 0$ obţinem $\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)^{p+1} > 1 + (p+1)\,\dfrac{y}{x}$ sau, efectuând calculele, $(x+y)^{p+1} > x^{p+1} + (p+1)\,x^p y$. □

Teorema următoare este rezultatul principal al acestei note. Ea extinde teorema 1 din [1].

Teorema 2. *Fie $p > 0$ un număr real, $k \in \mathbb{N}$ şi $(a_n)_{n \geqslant k}$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} (a_k + \ldots + a_n) = \infty \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{a_k + \ldots + a_n}{a_n} = \infty.$$

(i) *Definim şirul $(x_n)_{n \geqslant k}$ prin $x_k > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + \dfrac{a_n}{x_n^p}$, $\forall\, n \geqslant k$. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{(a_k + \cdots + a_{n-1})^{\frac{1}{p+1}}} = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}.$$

(ii) *Definim şirul $(y_n)_{n \geqslant k}$ prin $y_k > 0$ şi $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1 + a_n y_n^{p+1}}$, $\forall\, n \geqslant k$. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} y_n\,(a_k + \ldots + a_{n-1})^{\frac{1}{p+1}} = \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p+1}}}.$$

Demonstraţie. (i) Prin inducţie arătăm că $x_n > 0$, $\forall n \geqslant k$. Într-adevăr, $x_k > 0$, iar dacă $n \geqslant k$ şi presupunem că $x_n > 0$ atunci, din relaţia de recurenţă, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{a_n}{x_n^p}$, şi faptul că toţi termenii şirului $(a_n)_{n \geqslant k}$ sunt strict pozitivi, deducem că $x_{n+1} > 0$.

Fie $n \geqslant k$. Din relaţia de recurenţă şi Propoziţia 1 (ii) deducem că

$$x_{n+1}^{p+1} = \left(x_n + \frac{a_n}{x_n^p}\right)^{p+1} > x_n^{p+1} + (p+1)\,x_n^p \cdot \frac{a_n}{x_n^p} = x_n^{p+1} + (p+1)\,a_n$$

adică

$$x_{n+1}^{p+1} - x_n^{p+1} > (p+1)\,a_n. \tag{1}$$

Din (1), dând lui n valorile $k, k+1, \ldots, n-1$ şi adunând relaţiile respective obţinem

$$x_n^{p+1} - x_k^{p+1} > (p+1)\,(a_k + \ldots + a_{n-1})\,, \forall\, n \geqslant k+1. \tag{2}$$

Cum, din ipoteză, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_k+\cdots+a_{n-1}) = \infty$ (dacă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, atunci şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n-1} = \infty$), din (2) şi teorema cleştelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Din (2) şi $a_n > 0$, deducem că $\forall n \geqslant k+1$ avem

$$\frac{x_n^{p+1}}{a_n} > \frac{x_k^{p+1}}{a_n} + (p+1)\,\frac{a_k+\cdots+a_{n-1}}{a_n} > (p+1)\frac{a_k+\cdots+a_n}{a_n} - (p+1). \quad (3)$$

Ţinând cont de ipoteza $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_k+\ldots+a_n}{a_n} = \infty$, din (3) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^{p+1}}{a_n} = \infty$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{x_n^{p+1}} = 0. \quad (4)$$

Să observăm că pentru orice $n \geqslant k$ avem

$$x_{n+1}^{p+1} = \left(x_n + \frac{a_n}{x_n^p}\right)^{p+1} = x_n^{p+1}\left(1+\frac{a_n}{x_n^{p+1}}\right)^{p+1}$$

de unde

$$\frac{x_{n+1}^{p+1}-x_n^{p+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\dfrac{a_n}{x_n^{p+1}}\right)^{p+1}-1}{\dfrac{a_n}{x_n^{p+1}}}. \quad (5)$$

Cum $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{p+1}-1}{x} = p+1$, din (4), (5) şi caracterizarea limitei unei funcţii într-un punct cu şiruri rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{p+1}-x_n^{p+1}}{a_n} = p+1. \quad (6)$$

Deoarece şirul $(a_k+\ldots+a_n)_{n\geqslant k}$ este strict crescător şi are limita ∞, din lema Stolz-Cesàro, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{p+1}}{a_k+\ldots+a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{p+1}-x_n^{p+1}}{a_n}. \quad (7)$$

Din (6) şi (7) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^{p+1}}{a_k+\cdots+a_{n-1}} = p+1$, din care, după ridicarea la puterea $\dfrac{1}{p+1}$, obţinem limita din enunţ.

(ii) Să notăm $x_n = \dfrac{1}{y_n}$. Folosind relaţia de recurenţă din enunţ avem $x_k = \dfrac{1}{y_k}$ şi $x_{n+1} = x_n + \dfrac{a_n}{x_n^p}$, $\forall\, n \geqslant k$. Din (i) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{(a_k+\ldots+a_{n-1})^{\frac{1}{p+1}}} = (p+1)^{\frac{1}{p+1}},$$

din care deducem limita din enunţ. $\square$

În continuare dăm câteva exemple; pentru alte exemple vezi [1].

Exemplul 1. *Fie $\alpha > 0$, $p > 0$ numere reale.*

(i) *Definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + \dfrac{n^\alpha}{x_n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^{\frac{\alpha+1}{p+1}}} = \left(\dfrac{p+1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}$.*

(ii) *Definim şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin $y_1 > 0$ şi $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+n^\alpha y_n^{p+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{\alpha+1}{p+1}} y_n = \left(\dfrac{\alpha+1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}$.*

Demonstraţie. (i) Luăm $a_n = n^\alpha$ şi $k = 1$ în teorema 2. Cum $\alpha > 0$, din lema Stolz-Cesàro avem $\lim\limits_{n\to\alpha} \dfrac{1^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \dfrac{1}{\alpha+1}$. Deoarece $\alpha > 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + \ldots + a_n) = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{a_n} = \infty$. Din teorema 2, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{(1^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha)^{\frac{1}{p+1}}} = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}$. Trecând la limită în egalitatea

$$\frac{x_n}{n^{\frac{\alpha+1}{p+1}}} = \frac{x_n}{(1^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha)^{\frac{1}{p+1}}} \cdot \left(\frac{1^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right)^{\frac{1}{p+1}}, \ \forall\, n \geqslant 2,$$

obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^{\frac{\alpha+1}{p+1}}} = \left(\dfrac{p+1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}$.

(ii) Rezultă din (i).

Exemplul 2. *Fie $\alpha > 0$, $p > 0$ numere reale.*

(i) *Definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + \dfrac{\ln^\alpha n}{x_n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^{\frac{1}{p+1}}(\ln n)^{\frac{\alpha}{p+1}}} = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}$.*

(ii) *Definim şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin $y_1 > 0$ şi $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+y_n^{p+1}\ln^\alpha n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{p+1}}(\ln n)^{\frac{\alpha}{p+1}} y_n = (p+1)^{-\frac{1}{p+1}}$.*

Demonstraţie. (i) Luăm $a_n = \ln^\alpha n$ şi $k = 1$ în teorema 1. Să observăm că, din lema Stolz-Cesàro, $\lim\limits_{n\to\alpha} \dfrac{\ln^\alpha 1 + \ldots + \ln^\alpha(n-1)}{n\ln^\alpha n} = 1$. De aici deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + \ldots + a_n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{a_n} = \infty$. Din teorema 1, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{(\ln^\alpha 1 + \cdots + \ln^\alpha(n-1))^{\frac{1}{p+1}}} = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}$. Ţinând cont că pentru orice $n \geqslant 2$ avem

$$\frac{x_n}{n^{\frac{1}{p+1}}(\ln n)^{\frac{\alpha}{p+1}}} = \frac{x_n}{(\ln^\alpha 1 + \ldots + \ln^\alpha (n-1))^{\frac{1}{p+1}}} \left(\frac{\ln^\alpha 1 + \ldots + \ln^\alpha (n-1)}{n \ln^\alpha n} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

şi trecând la limită, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^{\frac{1}{p+1}}(\ln n)^{\frac{\alpha}{p+1}}} = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}$.

(ii) Rezultă din (i).

Exemplul 3. *Fie $\alpha > 0$, $p > 0$ numere reale.*

(i) *Definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + \dfrac{n \ln^\alpha n}{x_n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^{\frac{2}{p+1}}(\ln n)^{\frac{\alpha}{p+1}}} = \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p+1}}$.*

(ii) *Definim şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin $y_1 > 0$ şi $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1 + n(\ln^\alpha n)\, y_n^{p+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{2}{p+1}} (\ln n)^{\frac{\alpha}{p+1}} y_n = \left(\dfrac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}$.*

Demonstraţie. (i) Luăm $a_n = n \ln^\alpha n$ şi $k = 1$ în teorema 1. Din lema Stolz-Cesàro rezultă că

$$\lim_{n\to\alpha} \frac{1 \ln^\alpha 1 + \cdots + (n-1)\ln^\alpha (n-1)}{n^2 \ln^\alpha n} = \frac{1}{2}.$$

De aici deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + \ldots + a_n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{a_n} = \infty$. Din teorema 1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{(1\ln^\alpha 1 + \ldots + (n-1)\ln^\alpha (n-1))^{\frac{1}{p+1}}} = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Ţinând cont că pentru orice $n \geqslant 2$ avem egalitatea

$$\frac{x_n}{n^{\frac{2}{p+1}}(\ln n)^{\frac{\alpha}{p+1}}} = \frac{x_n}{(1\ln^\alpha 1 + \ldots + (n-1)\ln^\alpha (n-1))^{\frac{1}{p+1}}} \cdot \left(\frac{1\ln^\alpha 1 + \ldots + (n-1)\ln^\alpha (n-1)}{n^2 \ln^\alpha n} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

şi trecând la limită obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^{\frac{2}{p+1}}(\ln n)^{\frac{\alpha}{p+1}}} = \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p+1}}$.

(ii) Rezultă din (i).

Exemplul 4. *Fie $p > 0$ un număr real.*

(i) *Definim şirul $(x_n)_{n\geqslant 2}$ prin $x_2 > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{n(\ln n)\, x_n^p}$, $\forall n \geqslant 2$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{(\ln(\ln n))^{\frac{1}{p+1}}} = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}$.*

(ii) *Definim şirul* $(y_n)_{n\geqslant 2}$ *prin* $y_2>0$ *şi* $y_{n+1}=\dfrac{n(\ln n)\,y_n}{n(\ln n)+y_n^{p+1}}$, $\forall\, n\geqslant 2$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(\ln n))^{\frac{1}{p+1}}y_n=(p+1)^{-\frac{1}{p+1}}$.

Demonstraţie. (i) Luăm $a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$ şi $k=2$ în teorema 1. Cum din lema Stolz-Cesàro,

$$\lim_{n\to\alpha}\frac{\dfrac{1}{2\ln 2}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\ln(n-1)}}{\ln(\ln n)}=1,$$

deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_2+\ldots+a_n)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_2+\ldots+a_n}{a_n}=\infty$.

Din teorema 1, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\left(\dfrac{1}{2\ln 2}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\ln(n-1)}\right)^{\frac{1}{p+1}}}=(p+1)^{\frac{1}{p+1}}$.

Trecând la limită în egalitatea

$$\frac{x_n}{(\ln(\ln n))^{\frac{1}{p+1}}}=\frac{x_n}{\left(\dfrac{1}{2\ln 2}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\ln(n-1)}\right)^{\frac{1}{p+1}}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\dfrac{1}{2\ln 2}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\ln(n-1)}}{\ln(\ln n)}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

oricare ar fi $n\geq 3$ obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{(\ln(\ln n))^{\frac{1}{p+1}}}=(p+1)^{\frac{1}{p+1}}$.

(ii) Rezultă din (i).

Exemplul 5. *Fie* $p>0$ *un număr real.*

(i) *Definim şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *prin* $x_1>0$ *şi* $x_{n+1}=x_n+\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{x_n^p}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n^{\frac{1}{2(p+1)}}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{n}}{p+1}}}=2^{\frac{1}{p+1}}(p+1)^{\frac{1}{p+1}}$.

(ii) *Definim şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *prin* $y_1>0$ *şi* $y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1+\mathrm{e}^{\sqrt{n}}y_n^{p+1}}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2(p+1)}}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{n}}{p+1}}y_n=2^{-\frac{1}{p+1}}(p+1)^{-\frac{1}{p+1}}$.

Demonstraţie. (i) Luăm $a_n=\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$ şi $k=1$ în teorema 2. Cum, din lema Stolz-Cesàro, $\lim\limits_{n\to\alpha}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{1}}+\ldots+\mathrm{e}^{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n}\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}=2$, obţinem

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+\ldots+a_n)=\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{a_n}=\infty.$$

Din teorema 2, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\left(\mathrm{e}^{\sqrt{1}}+\ldots+\mathrm{e}^{\sqrt{n-1}}\right)^{\frac{1}{p+1}}}=(p+1)^{\frac{1}{p+1}}$.

Trecând la limită în egalitatea

$$\frac{x_n}{n^{\frac{1}{2(p+1)}}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{n}}{p+1}}}=\frac{x_n}{\left(\mathrm{e}^{\sqrt{1}}+\ldots+\mathrm{e}^{\sqrt{n-1}}\right)^{\frac{1}{p+1}}}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1}}+\ldots+\mathrm{e}^{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n}\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}\right)^{\frac{1}{p+1}},$$

oricare ar fi $n\geqslant 2$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n^{\frac{1}{2(p+1)}}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{n}}{p+1}}}=2^{\frac{1}{p+1}}\,(p+1)^{\frac{1}{p+1}}$.

(ii) Rezultă din (i).

Exemplul 6. *Fie $p>0$ un număr real.*

Definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin $x_1>0$ şi $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{x_n^p}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n^{\frac{1}{2(p+2)}}e^{\frac{\sqrt{n}}{p+2}}}=2^{\frac{1}{p+2}}\left(\dfrac{p+2}{2}\right)^{\frac{1}{p+2}}$.

Demonstraţie. Ridicând radicalul la pătrat avem $x_{n+1}^2=x_n^2+\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{x_n^p}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Notăm $a_n=x_n^2$, $x_n=\sqrt{a_n}$ obţinem $a_{n+1}=a_n+\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{a_n^{\frac{p}{2}}}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Din exemplul 5, în care în loc de p avem $\dfrac{p}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{\frac{1}{2(\frac{p}{2}+1)}}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{n}}{\frac{p}{2}+1}}}=2^{\frac{1}{\frac{p}{2}+1}}\left(\dfrac{p}{2}+1\right)^{\frac{1}{\frac{p}{2}+1}}$ adică

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n^{\frac{1}{p+2}}\mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{n}}{p+2}}}=2^{\frac{2}{p+2}}\left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{2}{p+2}}.$$

Extrăgând radicalul obţinem valoarea din enunţ.

Bibliografie

[1] D. Popa, *Aplicaţii ale lemei Stolz-Cesàro*, G.M.-B, Nr.2, 2017, 57-61.