Clasa a IX-a

13. 1. a) Arătaţi că, dacă x este număr real şi $[x]+[-x]=0$, atunci x este număr întreg.

b) Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{2020x}{x+1}\right]+\left[\frac{2020}{x+1}\right]=2020$.

14. Arătaţi că $10^{2020}+18\cdot 2020-28$ este divizibil cu 27.

15. (*Identitatea Botez – Catalan*) Arătaţi că, dacă n este număr natural nenul, atunci

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}.$$

16. a) Folosind un punct arbitrar $P(x,y)$ dintr-un sistem de coordonate carteziene, arătaţi că:

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}\geqslant\sqrt{13},\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

b) Determinaţi cea mai mică valoare a expresiei

$$E(x) = \sqrt{4x^2 + 28x + 85} + \sqrt{4x^2 - 28x + 113},$$

unde x este un număr real.

17. Diagonalele patrulaterului convex $ABCD$ se intersectează în O. Arătaţi că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD şi DOA sunt vârfurile unui paralelogram.

18. Arătaţi că, dacă în interiorul patrulaterului convex $ABCD$ există un punct O astfel încât $OA = OB = OC = OD$ şi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

Clasa a X-a

19. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $\dfrac{3z}{2} + \dfrac{1}{3z} = 1$. Calculaţi $z^4 + \dfrac{1}{z^4}$.

20. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^6 - 5z^3 + 4 = 0$.

21. Determinaţi $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $\dfrac{2z + 3 - 4i}{1 + 2i + \bar{z}} = \dfrac{9}{4}$.

22. Fie $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| \leqslant 2$ şi $|z + 1| \leqslant \sqrt{5}$. Arătaţi că $\left|z + \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Când are loc egalitatea ?

23. Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ o soluţie a ecuaţiei $z^2 + z + 1 = 0$.

a) Calculaţi produsul $(1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha^2) \cdot (1 - \alpha^4) \cdot (1 - \alpha^5)$.

b) Arătaţi că $(3 + 5\alpha + 3\alpha^2)^6 \in \mathbb{Z}$.

24. a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^5 = \overline{z}$.

b) Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ soluţiile ecuaţiei de mai sus. Determinaţi natura poligonului $M_1M_2\ldots M_n$, unde z_i este afixul punctului M_i.