O MINIATURĂ POLINOMIALĂ

LEONARD GIUGIUC[1)] şi MARCEL ŢENA[2)]

Abstract. We present two solutions to a problem involving a polynomial divisible by the sum of its derivatives

Keywords: polynomial, derivative, divisibility

MSC: 12D05

Ne propunem să rezolvăm prin două metode o problemă frumoasă de polinoame din „folclorul“ matematic şi anume:

Să se determine polinoamele f din $\mathbb{C}[X]$ de grad $n > 1$ cu proprietatea că $f' + f'' + f^{(3)} + \ldots + f^{(n)}$ divide f.

Soluţia I (L. Giugiuc) Dacă f are coeficientul dominant c, atunci nc este coeficientul dominant al lui $\sum\limits_{k=1}^{n} f^{(k)} = g$.

1) Profesor, Drobeta Turnu Severin.

2) Profesor dr., Bucureşti.

Mai mult, $\mathrm{grad}(g) = n - 1$. Deci, există $b \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$nf = (X - b) \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}. \tag{1}$$

Prin derivări succesive ale relaţiei (1) şi folosind relaţia lui Leibniz obţinem

$$(n - j) f^{(j)} = (X - b + j) \sum_{k=j+1}^{n} f^{(k)},\ j = 0, \ldots, n - 1.$$

În particular, pentru $j = n - 1$ avem $f^{(n-1)} = (X - b + n - 1) f^{(n)}$.

Pentru $j = n - 2$ avem $2f^{(n-2)} = (X - b + n - 2)(f^{(n-1)} + f^{(n)}) = (X - b + n - 2)(X - b + n) f^{(n)}$. Aşadar, $b - n$ este rădăcină a lui $f^{(n-2)}$.

Pentru $j = n - 3$ avem $3f^{(n-3)} = (X - b + n - 3)(f^{(n-2)} + f^{(n-1)} + f^{(n)})$. Cum $b - n$ este rădăcină a lui $f^{(n-2)}$ şi a lui $f^{(n-1)} + f^{(n)}$, deducem că $b - n$ este rădăcină a lui $f^{(n-3)}$.

Obţinem inductiv că $b - n$ este rădăcină a lui $f^{(j)}$, $j = 0, \ldots, n - 2$.

De mai sus avem că $b - n$ nu este rădăcină a lui $f^{(n-1)}$. În concluzie, $b - n$ are ordinul de multiplicitate $n - 1$ în f, de unde $f = c(X - b)(X - b + n)^{n-1}$. Notând $b - n = a$, vom obţine o formă mai elegantă a lui f, anume

$$f = c(X - a - n)(X - a)^{n-1}.$$

Se poate verifica inductiv că polinoamele $f = c(X - a - n)(X - a)^{n-1}$ au proprietatea dorită.

Soluţia a II-a (M. Ţena). Ca în prima soluţie avem

$$f = \frac{1}{n}(X - b)(f' + f'' + \ldots + f^{(n)}).$$

Notăm $h = f + f' + f'' + \ldots + f^{(n)}$, deci $h' = f' + f'' + \ldots + f^{(n)}$ şi

$$f = \frac{1}{n}(X - b)h'. \tag{2}$$

Dar $f = h - h'$ şi

$$(1) \iff h - h' = \frac{1}{n}(X - b)h' \iff h = \frac{1}{n}(X - b + n)h'. \tag{2}$$

Egalitatea (2) arată că h' divide h şi atunci se ştie (se poate vedea, de exemplu, [1]) că h are o singură rădăcină, multiplă de ordin n. Această rădăcină este, evident, $a = b - n$, prin urmare

$$h = c(X - a)^n. \tag{3}$$

Din (1) şi (3) rezultă $f = c(X - b)(X - a)^{n-1} = c(X - a - n)(X - a)^{n-1}$.

Bibliografie

[1] V. Prasolov, *Polynomials (Problem 1.1 p. 41)*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004