PENTRU CERCURILE DE ELEVI

METODA REDUCERII LA ABSURD ÎN DIVERSE APLICAŢII

Traian Tămâian [1)]

Metoda reducerii la absurd se poate aplica la rezolvări de probleme din diferite domenii ale matematicii. Folosirea ei este aprope „automată“ atunci când vrem să arătăm că este imposibilă apariţia unei anumite situaţii. În această lecţie vom prezenta câteva tipuri de astfel de probleme a căror rezolvare „cere” utilizarea acestei metode. Multe dintre problemele prezentate sunt publicate în diverse reviste de specialitate sau constituie subiecte date la olimpiade sau concursuri de matematică.

P1. (*T. Tămâian*, G.M.-B nr. 3/2006) *Pentru* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, *se consideră numerele reale* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *astfel încât* $\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \geqslant \sqrt{n}$.

Demonstraţi că $\sum_{i=1}^{n} \cos x_i \leqslant \sqrt{n(n-1)}$.

Soluţie. Reducând la absurd, presupunem că

$$\sum_{i=1}^{n} \cos x_i > \sqrt{n(n-1)} \tag{1.1}$$

[1)]Profesor, Liceul Teoretic Carei.

Prin ridicare la pătrat, din (1.1) obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 x_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos x_i \cos x_j > n(n-1). \tag{1.2}$$

Din $\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \geqslant \sqrt{n}$ rezultă $\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{\sin x_i} \sin x_j \geqslant n.$ (1.3)

Adunând relaţiile (1.2) şi (1.3) rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} (\sin^2 x_i + \cos^2 x_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \cos(x_i - x_j) > n + n(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \cos(x_i - x_j) > \frac{1}{2} n(n-1),$$

fals, căci

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \cos(x_i - x_j) \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1 = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Presupunerea făcută este deci falsă şi rezultă concluzia.

P2. (*M. Chirciu*, G.M.-B nr. 1/2005) *Fie* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\sin x + \sin y + \sin z \geqslant \sqrt{3}$.

Demonstraţi că are loc relaţia $\cos x + \cos y + \cos z \leqslant \sqrt{6}$.

Soluţie. Rezultă din P1 în cazul particular când $n = 3$.

P3. *Demonstraţi că* $\max\left\{x^2 + y + \frac{1}{4}, y^2 + x + \frac{1}{4}\right\} \geqslant 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Raţionând prin reducere la absurd, presupunem că există $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + y + \frac{1}{4} < 0$ şi $y^2 + x + \frac{1}{4} < 0$. Adunând aceste relaţii obţinem $x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{2} < 0$, adică $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 < 0$, ceea ce este fals. Presupunerea făcută este falsă şi rezultă concluzia.

P4. *Să se arate că* $|z_1 + z_2| \leqslant 2$ *sau* $|2z_1 + z_2| \geqslant 3$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *cu* $|z_1| = |z_2|$.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că există $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1| = |z_2|$, $|z_1 + z_2| > 2$ şi $|2z_1 + z_2| < 3$. Rezultă că $3|z_1 + z_2| > 6$ şi $6 > 2|2z_1 + z_2|$, de unde

$$3|z_1 + z_2| > 2|2z_1 + z_2| \tag{4.1}$$

Cum $|z^2| = z \cdot \overline{z}, \forall z \in \mathbb{C}$, inegalitatea (4.1) este echivalentă sucesiv cu $9|z_1 + z_2|^2 > 4|2z_1 + z_2|^2$, $9(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) > 4(2z_1 + z_2)(2\overline{z_1} + \overline{z_2})$, $9(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z_1} z_2 + z_1 \overline{z_2}) > 16|z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 8(\overline{z_1} z_2 + z_1 \overline{z_2})$,

$$0 > 7|z_1|^2 - 5|z_2|^2 - \overline{z_1} z_2 - z_1 \overline{z_2}. \tag{4.2}$$

Deoarece din ipoteză avem $|z_1| = |z_2|$, inegalitatea (4.2) se scrie echivalent $0 > |z_1|^2 + |z_2|^2 - \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}$, $(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) < 0$, $|z_1 - z_2|^2 < 0$, ceea ce este fals. Presupunerea făcută este deci falsă şi rezultă concluzia.

P5. *Studiaţi dacă există $x, y \in \mathbb{R}^*$ astfel încât*

$$4^{x+y} + \sqrt{2011^x + 2011^y - 2} = 2^{x+y+1} - 1.$$

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că există $x, y \in \mathbb{R}^*$ cu proprietatea cerută. Relaţia se scrie echivalent

$$\sqrt{2011^x + 2011^y - 2} + (2^{x+y} - 1)^2 = 0,$$

de unde rezultă $2011^x + 2011^y - 2 = 0$ şi $2^{x+y} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x$. Atunci $2011^x + 2011^{-x} = 2 \Leftrightarrow 2011^x + \dfrac{1}{2011^x} = 2 \Leftrightarrow (2011^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Rezultă că $x = y = 0$, fals. Presupunerea făcută este deci falsă.

P6. *Pentru $x, y \in (0, \infty)$ se consideră*

$$E(x, y) = \frac{1}{1 + x + x^2} + \frac{1}{1 + y + y^2} + \frac{1}{1 + x + y}.$$

Să se arate că, dacă $E(x, y) = 1$, atunci $xy = 1$.

Soluţie. Avem

$$E\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1 + x + x^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{1 + x + \frac{1}{x}} = \frac{1 + x + x^2}{1 + x + x^2} = 1. \quad (6)$$

Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că $xy \neq 1$.

Dacă $xy > 1$, rezultă $y > \dfrac{1}{x}$ şi atunci, folosind (6), avem $E(x, y) < E\left(x, \dfrac{1}{x}\right) = 1$, fals.

Dacă $xy < 1$, rezultă $y < \dfrac{1}{x}$ şi atunci, folosind (6), avem $E(x, y) > E(x, \frac{1}{x}) = 1$, fals.

Presupunerea făcută este falsă şi rezultă că $xy = 1$.

P7. Există funcţii $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, injective, astfel încât

$$f(x^2) + f(2^x) = 2009, \ \forall\, x \in \mathbb{R}?$$

Soluţie. Presupunem că există o astfel de funcţie. Dând lui x valorile 2 şi 4 obţinem respectiv relaţiile $2f(4) = 2009$ şi $2f(16) = 2009$.

Din aceste relaţii obţinem că $f(4) = f(16)$, fals. Presupunerea făcută este deci falsă şi rezultă că nu există astfel de funcţii.

P8. Există funcţii $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, injective, astfel încât $f(x) + f(2^x) + f(\log_2 x) = 2009, \forall x \in (1, \infty)$?

Soluţie. Presupunem că există o astfel de funcţie. Dând lui x valorile 2 şi 4 obţinem respectiv relaţiile $f(2) + f(4) + f(1) = 2009$ şi $f(4) + f(16) + f(2) =$

$= 2009$. Din aceste relaţii obţinem că $f(1) = f(16)$, fals. Presupunerea făcută este deci falsă şi deci rezultă că nu există astfel de funcţii.

P9. (*T. Tămâian*, G.M.-B nr. 10/2015) *Fie matricele* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, *astfel încât* $\alpha(AB - BA) = A^2$, *unde* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Să se arate că* $\det A = 0$.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\det A \neq 0$. Rezultă că A este inversabilă şi relaţia din enunţ se scrie succesiv $\alpha AB - (A + \alpha B)A = O_n$, $\alpha B - A^{-1}(A + \alpha B)A = O_n$, $(A + \alpha B) - A^{-1}(A + \alpha B)A = A$,

$$(A + \alpha B)A^{-1} - A^{-1}(A + \alpha B) = I_n. \tag{9}$$

Din (9) rezultă că $Tr[(A + \alpha B)A^{-1} - A^{-1}(A + \alpha B)] = TrI_n$, adică $0 = n$, fals. Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi deci $\det A = 0$.

P10. *Fie* $\alpha \in \mathbb{C}$ *şi* $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ *astfel încât* $\alpha(AB - BA) = A^2$.
Să se arate că $A^2 = O_2$.

Soluţie. Din **P9** reiese că $\det A = 0$. Aplicând teorema *Hamilton-Cayley* obţinem $A^2 = Tr(A)A$. Folosind ipoteza şi luând urmele matricelor, obţinem $\alpha Tr(AB - BA) = (Tr(A))^2$, de unde $Tr(A) = 0$. Astfel, $A^2 = O_2$.

P11. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, astfel încât $A^2+B^2+2AB = O_n$. Să se arate că $\det(A + B) = 0$.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\det(A + B) \neq 0$. Rezultă că matricea $A + B$ este inversabilă şi relaţia din enunţ se scrie succesiv
$(A + B)B = -A(A + B)$, $B = -(A + B)^{-1}A(A + B)$,
$A + B = A - (A + B)^{-1}A(A + B)$, $I_n = A(A + B)^{-1} - (A + B)^{-1}A$.
Rezultă că $Tr(I_n) = Tr[A(A+B)^{-1} - (A+B)^{-1}A]$, adică $n = 0$, absurd.
Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi deci $\det(A + B) = 0$.

P12. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 + B^2 + 2AB = O_2$. Să se arate că $\det(A - B) = 2(\det A + \det B)$.

Soluţie. Din **P11** reiese că $\det(A + B) = 0$.
Se cunoaşte că pentru orice $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ are loc relaţia
$$\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B)$$
şi, folosind relaţia precedentă, rezultă că $\det(A-B) = 2(\det A+\det B)$, adică relaţia cerută.

P13. *(T. Tămâian şi G. Buth, O.M.L., 2016)* Arătaţi că nu există matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietăţile $A^2+B^2+2AB = O_2$ şi $\det(A^2-B^2) < 0$.

Soluţie. Presupunem că există două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietăţile din enunţ. Se cunoaşte că pentru orice $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ are loc relaţia

$$\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y). \tag{13.1}$$

Înlocuind în relaţia (13.1) pe X cu A^2 şi pe Y cu B^2 rezultă

$$\det(A^2 + B^2) + \det(A^2 - B^2) = 2[\det(A^2) + \det(B^2)]. \tag{13.2}$$

Relaţia din enunţ se scrie $A^2 + B^2 = -2AB$, de unde $\det(A^2 + B^2) = (-2)^2 \det(AB)$, adică

$$\det(A^2 + B^2) = 4 \det A \det B. \tag{13.3}$$

Din (13.2) şi (13.3) rezultă că

$$4 \det A \det B + \det(A^2 - B^2) = 2([\det A)^2 + (\det B)^2],$$

ceea ce dă $\det(A^2 - B^2) = 2(\det A - \det B)^2$. Cum $\det(A^2 - B^2) < 0$, rezultă că $2(\det A - \det B)^2 < 0$, absurd.

Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi rezultă concluzia.

P14. *(M. Omarjee, G.M. 5/2013)* Fie A, B două matrice distincte din $M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $B^2 = BA$. Poate fi matricea $AB + B^2$ inversabilă?

Soluţie. Presupunem că matricea $AB + B^2$ este inversabilă.

Cum $AB + B^2 = (A + B)B$, rezultă că B este inversabilă. Atunci din $B^2 = BA$ rezultă $B = A$, fals.

Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci matricea $AB + B^2$ nu poate fi inversabilă.

P15. (*V. Cerbu* şi *M. Piticari*, G.M.12/2013) a) Să se găsească două matrice pătratice de ordin doi cu elemente reale cu proprietatea că

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Să se arate că orice două matrice pătratice de ordin doi cu elemente reale, care au proprietatea că $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, nu comută.

Soluţie. a) Căutăm matrice de forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$, unde $x, y, z, t \in (0, \infty)$.

Rezultă că $\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ tz & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, de unde $x = t = \sqrt{2}$, $y = z = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Obţinem matricele $A \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3/\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, care satisfac cerinţa.

b) Presupunem că există $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, cu $AB = BA$, astfel încât $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci avem

$$-5 = \det(A^2 + B^2) = \det[(A + Bi)(A - Bi)] = |\det(A + Bi)|^2 \geqslant 0,$$

fals. Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi rezultă concluzia.

P16. *(L. Giugiuc, O.M.N., 2014)* Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$. Să se arate că matricea $AB - BA$ este singulară.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că matricea $AB - BA$ este nesingulară şi, deci, este inversabilă. Relaţia din enunţ este echivalentă cu fiecare dintre relaţiile

$$(A - B)^2 = AB - BA, \tag{16.1}$$

$$A(A - B) = (A - B)B. \tag{16.2}$$

Cum $AB - BA$ este inversabilă, din (16.1) rezultă că $A - B$ este inversabilă şi din (16.2) rezultă $B = (A-B)^{-1}A(A-B)$, de unde reiese $A-B = A-(A-B)^{-1}A(A-B)$, sau $(A-B)(A-B)^{-1} = A(A-B)^{-1}-(A-B)^{-1}A$, deci $I_n = A(A - B)^{-1} - (A - B)^{-1}A$.

Rezultă că $n = Tr(I_n) = Tr[A(A - B)^{-1} - (A - B)^{-1}A] = 0$, fals.

Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi deci matricea $AB - BA$ estre singulară.

BIBLIOGRAFIE

[1] Tămîian Traian, *Probleme pentru examene şi concursuri şcolare*, Ed. Paralela 45, 2013.
[2] Colecţia revistei „Gazeta Matematică“
[3] Colecţia revistei „R.M.T.”