ASUPRA UNEI PROBLEME DE CONCURS

Eugen Păltănea[1)]

Abstract. In this note, we comment on a contest problem (proposed at the Romanian National Mathematical Olympiad -2019) claiming that the solutions of the differential equation $y'' + f(x)y = 0$, where f is an increasing and positive function on $[0, \infty)$, are bounded.

Keywords: differential equations, second mean value theorem for integrals

MSC: 26A06,26A42,34A05

Una dintre cele mai frumoase probleme propuse la a 70-a ediţie a Olimpiadei Naţionale de Matematică – Deva 2019, se referă la mărginirea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul al II-lea. Ne referim la Subiectul 3 propus la clasa a XII-a ([1], pag. 338). În nota matematică de faţă ne propunem să comentăm şi să ilustrăm rezultatul acestei probleme instructive. Să notăm că niciunul dintre cei 59 de concurenţi ai clasei a XII-a nu a reuşit să rezolve problema. Mai precis, s-a înregistrat un punctaj mediu de 0,78, din cele 7 puncte alocate subiectului. Explicaţia constă în faptul că mai mulţi concurenţi au indicat exemplul solicitat ca primă cerinţă a problemei, dar nimeni nu a reuşit să dovedească mărginirea soluţiilor respectivei ecuaţii diferenţiale. Demonstraţia se bazează pe *Teorema a doua de medie pentru integrale*, al cărei enunţ este prezentat în continuare.

Teoremă. *Fie funcţiile $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Presupunem că ψ este integrabilă pe $[a, b]$.*

(1) *Dacă φ este descrescătoare şi pozitivă pe $[a, b]$, atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca*

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^c \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) *Dacă φ este monotonă pe $[a, b]$, atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca*

[1)]Universitatea „Transilvania“ din Braşov

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^c \psi(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(b)\int_c^b \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţia acestui rezultat clasic se găseşte, de exemplu, în monografia [3], pag. 331-332.

Fie I un interval de numere reale. Vom nota prin $\mathcal{C}^2(I)$ mulţimea funcţiilor $g : I \to \mathbb{R}$, de două ori derivabile pe I, cu derivata de ordinul al doilea continuă pe I. Prezentăm în continuare o reformulare a problemei de concurs menţionate, cu o completare a rezultatului evidenţiat de respectiva problemă.

Propoziţie. *Fie* $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *o funcţie monoton crescătoare şi* $g \in \mathcal{C}^2([0,\infty))$ *o soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul al doilea* $y''(x) + f(x)y(x) = 0,\ x \in [0,\infty)$. *Atunci:*

(i) *funcţia* g *este mărginită;*
(ii) *funcţia* g *are o infinitate de rădăcini.*

Demonstraţie. Considerăm o funcţie $g \in \mathcal{C}^2([0,\infty))$ astfel ca

$$g''(x) + f(x)g(x) = 0,\ \forall\, x \geq 0.$$

(i) Aşa cum am menţionat anterior, demonstraţia mărginirii funcţiei g (a se vedea [1], pag. 338) se bazează în mod esenţial pe aplicarea *Teoremei a doua de medie pentru integrale*. Astfel, se demonstrează inegalitatea

$$|g(x)| \leq \sqrt{g^2(0) + \frac{(g')^2(0)}{f(0)}},\ \forall\, x \geq 0, \tag{1}$$

care indică un majorant al funcţiei $|g|$.

(ii) Presupunem prin reducere la absurd că funcţia g admite cel mult un număr finit de rădăcini. Atunci, pe baza proprietăţii valorilor intermediare (*Darboux*), există $a \geq 0$ astfel ca $g(x) > 0,\ \forall\, x \geq a$ sau $g(x) < 0,\ \forall\, x \geq a$.

Analizăm cazul când g este strict pozitivă pe $[a,\infty)$. Atunci g'' este strict negativă pe $[a,\infty)$. Rezultă că g' este strict descrescătoare (deci funcţia g este concavă pe $[a,\infty)$). Să presupunem că funcţia g' ar fi strict pozitivă pe $[a,\infty)$. Fie $x > a$. Conform formulei lui *Taylor* cu rest *Lagrange*, există $c_x \in (a,x)$ astfel ca

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}g''(c_x)(x-a)^2.$$

Funcţiile f şi g sunt crescătoare şi strict pozitive pe $[a,\infty)$, deci

$$g''(c_x) = -f(c_x)g(c_x) \leq -f(a)g(a),$$

de unde

$$g(x) \leq g(a) + g'(a)(x-a) - \tfrac{1}{2}f(a)g(a)(x-a)^2.$$

Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$. Contradicţie. Prin urmare, există $b \geq a$ astfel încât $g'(b) \leq 0$. Din monotonia lui g' deducem $g'(x) < g'(b) \leq 0$, $\forall\, x > b$. Fixăm $c > b$. Pentru $x > c$, există $d_x \in (c,x)$ astfel ca:

$$g(x) = g(c) + g'(d_x)(x-c) < g(c) + g'(c)(x-c).$$

Rezultă $\lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$. Contradicţie. În concluzie, g nu este strict pozitivă pe $[a, \infty)$.

Analog se arată că g nu este strict negativă pe $[a, \infty)$.

Ca urmare, g are o infinitate de rădăcini în intervalul $[0, \infty)$. □

În continuare, ne propunem să exemplificăm rezultatele evidenţiate de propoziţia de mai sus. În particular, vom comenta acurateţea majorării oferite de relaţia (1).

Exemplul 1. Vom prezenta la început cazul elementar al funcţiilor f constante. Considerăm $f = \omega^2$, unde ω este o constantă strict pozitivă. Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea, cu coeficienţi constanţi,

$$y'' + \omega^2 y = 0,\ \omega > 0,$$

admite ecuaţia caracteristică $r^2 + \omega^2 = 0$, cu soluţiile complexe $r_{1,2} = \pm\omega i$. Soluţia generală a ecuaţiei este de forma

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \overline{C}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x},\ x \in \mathbb{R},$$

unde $C \in \mathbb{C}$, sau

$$y(x) = A\sin\omega x + B\cos\omega x,\ x \in \mathbb{R},$$

unde A şi B sunt constante reale. Pentru detalii, se poate consulta, de exemplu, [2]. Prin urmare, pentru o funcţie $g \in \mathcal{C}^2([0, \infty))$ cu proprietatea $g''(x) + \omega^2 g(x) = 0$, $\forall\, x \geq 0$, există $A, B \in \mathbb{R}$ astfel ca $g(x) = A\sin\omega x + {}$ $+B\cos\omega x$, $\forall\, x \geq 0$. Dacă A şi B nu sunt ambele nule, există $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel ca

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega x\right) = \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega x + \theta),\ x \geq 0. \end{aligned}$$

Astfel g are o infinitate de rădăcini şi este mărginită, cu

$$\sup_{x\geq 0}|g(x)| = \max_{x\geq 0}|g(x)| = \sqrt{A^2+B^2}.$$

Pe de altă parte, să observăm că

$$\sqrt{g^2(0) + \frac{(g')^2(0)}{f(0)}} = \sqrt{B^2 + \frac{(\omega A)^2}{\omega^2}} = \sqrt{A^2+B^2},$$

deci majorantul funcţiei $|g|$ indicat de relaţia (1) este optim.

Exemplul 2. Considerăm *funcţia scară* (constantă pe porţiuni) definită prin $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = 4\pi^2[x+1]^2$, $x \in [0, \infty)$, unde $[a]$ desemnează partea întreagă a numărului real a.

Explicit, avem $f(x) = 4\pi^2 n^2,\ x \in [n-1, n)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $g \in \mathcal{C}^2$ o soluţie a ecuaţiei $y'' + fy = 0$. Conform teoriei (a se vedea Exemplul 1), pentru oricare număr natural nenul n, există constantele reale A_n şi B_n astfel ca

$$g(x) = A_n\sin(2n\pi x) + B_n\cos(2n\pi x),\ \forall\, x \in [n-1, n).$$

Deoarece f este discontinuă în punctele din $\mathbb{N}^*$, este necesar să avem $B_n = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, funcţia g se anulează pe $\mathbb{N}$. Continuitatea funcţiei g' pe $\mathbb{N}^*$ impune:

$2\pi n A_n = \lim_{x\uparrow n} g'(x) = \lim_{x\downarrow n} g'(x) = 2\pi(n+1)A_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

Atunci există $C \in \mathbb{R}$ astfel ca $A_n = C/n,\ n \in \mathbb{N}^*$. Vom deduce că ecuaţia $y'' + f(x)y = 0,\ x \geq 0$, admite soluţiile de clasă $\mathcal{C}^2$:

$$g(x) = \frac{C}{[x+1]} \sin\left(2\pi x[x+1]\right),\ x \in [0, \infty),$$

unde C este o constantă reală arbitrară. Constatăm că

$$\max_{x\geq 0} |g(x)| = |g(1/4)| = |C|.$$

Pe de altă parte

$$\sqrt{g^2(0) + \frac{(g')^2(0)}{f(0)}} = \sqrt{0 + \frac{(2\pi C)^2}{4\pi^2}} = |C|,$$

deci majorantul funcţiei $|g|$ indicat de relaţia (1) este optim. Graficele funcţiilor f şi g, pentru constanta $C = 5000$, sunt reprezentate în Figura 1.

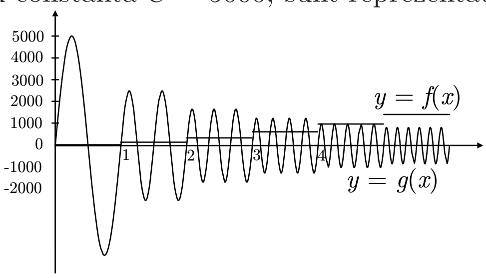

Figura 1. Graficele funcţiilor f (de tip scară) şi g.

Exemplul 3. Considerăm că este instructiv să exemplificăm propoziţia enunţată anterior în cazul unei funcţii f continue şi strict crescătoare. Vom construi un astfel de exemplu alegând funcţia g de forma

$$g(x) = a(x) \sin b(x),\ x \geq 0,$$

unde a şi b sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe $[0, \infty)$, astfel încât funcţia $-g''/g$ să fie strict pozitivă şi strict crescătoare pe mulţimea $[0, \infty) \setminus \{x \geq 0 \,|\, g(x) = 0\}$. Prin acest procedeu, obţinem (ca exemplu) funcţia $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$,

$$f(x) = 4e^{4x} - 1,\ x \in [0, \infty).$$

În acest caz, ecuaţia $y'' + f(x)y = 0,\ x \geq 0$, admite familia de soluţii de clasă $\mathcal{C}^2$

$$g(x) = Ce^{-x} \sin\left(e^{2x}\right),\ x \in [0, \infty),$$

unde C este o constantă reală. Verificarea relaţiei $g''(x) + f(x)g(x) = 0$, $\forall\, x \geq 0$, este elementară. Evident g admite o infinitate de rădăcini, iar printr-un studiu elementar, obţinem

$$\|g\| := \sup_{x\geq 0} |g(x)| = \max_{x\geq 0} |g(x)| = g(1/2 \ln a) = |C| \frac{\sin a}{\sqrt{a}},$$

unde $a \in (1, \pi/2)$ astfel ca tg$a = 2a$. Inegalitatea (1) propune majorantul

$$M := \sqrt{g^2(0) + \frac{(g')^2(0)}{f(0)}} = \frac{2|C|\sqrt{1 - \sin 1 \cdot \cos 1}}{\sqrt{3}}.$$

Constatăm că, pentru $C \neq 0$, avem

$$\|g\| \cong 0.85124 \cdot |C| < 0.85272 \cdot |C| \cong M,$$

deci M este o foarte bună estimare a mărimii $\|g\|$. Graficele funcţiilor f şi g, pentru constanta $C = 3^{12}$, sunt reprezentate în Figura 2.

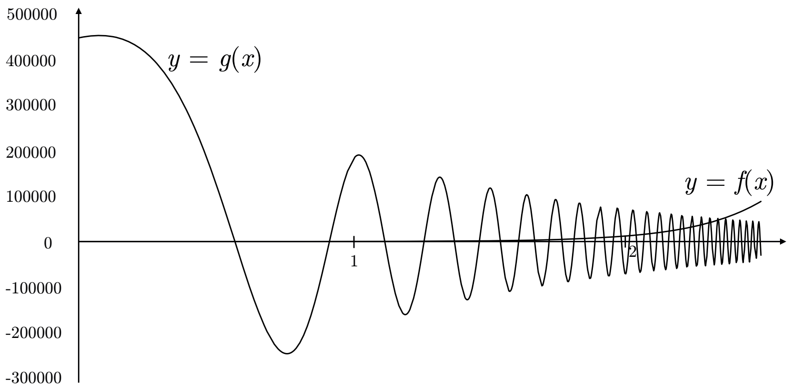

Figura 2. Graficele funcţiilor f (continuă) şi g.

Bibliografie

[1] M. Bălună, A 70-a Olimpiadă Naţională de Matematică, Deva-Hunedoara, 23 aprilie 2019, G.M.-B nr. 6-7-8/2019.

[2] A. Halanay, Ecuaţii diferenţiale, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

[3] Gh. Sireţchi, Calcul diferenţial şi integral, vol. 1, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.