SOLUŢII ALE UNEI PROBLEME DE CONCURS

Traian Preda[1)]

În acest articol vom da patru soluţii la problema 4 de la olimpiada judeţeană 2018, clasa a 7-a, propusă de *Marius Mâinea* şi *Petru Braica*.

Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle ACB = 30°$ şi $\sphericalangle BAC = 80°$. Considerăm punctul M interior triunghiului ABC, astfel încât $m(\sphericalangle MAC) = 60°$ *şi* $m(\sphericalangle MCA) = 20°$. *Dacă N este intersecţia dreptelor BM şi AC, să se arate că $(MN$ este bisectoarea $\sphericalangle AMC$.*

Trebuie să demonstrăm că o semidreaptă este bisectoarea unui unghi.

În soluţiile 1 şi 2 vom demonstra că un punct de pe semidreaptă se află la distanţe egale de laturile unghiului.

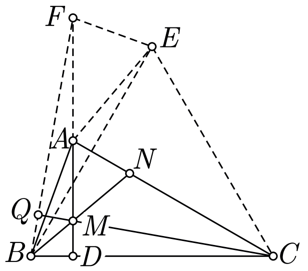
Pentru aceasta în prima soluţie (cea „oficială") se face o construcţie auxiliară, iar în soluţia a doua se folosesc teorema sinusurilor şi câteva formule de trigonometrie.

În soluţia 3 construim centrul cercului circumscris ΔABC, cu ajutorul căruia vom arăta că semidreapta împarte unghiul în două unghiuri congruente.

În ultima soluţie vom aplica reciproca teoremei bisectoarei folosindu-ne de teorema lui *Menelaus* şi de o lemă cunoscută.

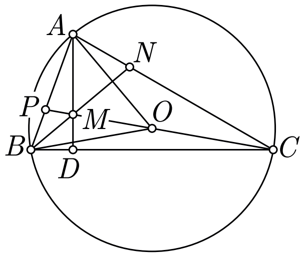
Soluţia 1 („oficială"). Construim ΔBCE echilateral şi ΔBFE isoscel cu $m(\sphericalangle EBF) = 20°$ (ca în figura alăturată). Notăm $CM \cap BF = \{Q\}$. Atunci $m(\sphericalangle BCQ) = 10°$ şi $m(\sphericalangle CBF) = 60° + 20° = 80°$ de unde $CQ \perp BF$. Avem $\Delta ABC \equiv \Delta AEC$ (L.U.L.), deci $AB \equiv AE$. Avem şi $\Delta BAE \equiv \Delta BAF$ (L.U.L.), de unde $AF = AE$, $AF = AB$, $m(\sphericalangle AFB) = m(\sphericalangle ABF) = 10°$ şi $m(\sphericalangle BAD) = 20°$, unde $\{D\} = AM \cap BC$. Rezultă D, A, F coliniare şi $FD \perp BC$, deci $\Delta BQC \equiv \Delta BDF$ (I.U.), apoi $BQ = BD$. Astfel MB este bisectoarea unghiului $\sphericalangle QMD$, deci MN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMC$. $\square$

[1)] Profesor, Colegiul Naţional „Grigore Moisil", Bucureşti.

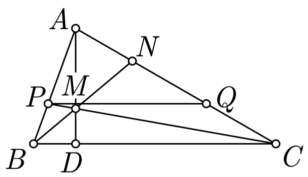


Soluţia 2 (trigonometrică).

Avem $BQ = BC \sin 10°$, $BD = AB \sin 20° = 2AB \sin 10° \cos 10°$ şi $\dfrac{AB}{\sin 30°} = \dfrac{BC}{\sin 80°}$ (teorema sinusurilor), de unde $BC = 2AB \cos 10°$, deci $BQ = BD$ şi se continuă ca în soluţia anterioară. □

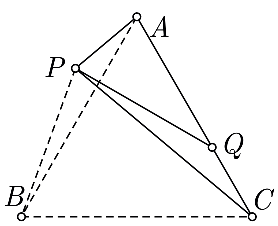


Soluţia 3. Fie O centrul cercului circumscris ΔABC. Atunci $\mathrm{m}(\sphericalangle BOC) = 2\mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 160°$ şi ΔBOC este isoscel, deci $\mathrm{m}(\sphericalangle BCO) = 10°$, ceea ce arată că punctul M se află pe semidreapta $(CO$. Cum ΔAOC este isoscel şi $\mathrm{m}(\sphericalangle ACO) = 20°$, rezultă că $\mathrm{m}(\sphericalangle CAO) = 20°$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle OAB) = 60°$. Cum ΔAOB este isoscel, el este echilateral. Dar $\mathrm{m}(\sphericalangle AOM) = \mathrm{m}(\sphericalangle OAM) = 40°$, deci $AM = MO$. Obţinem $\Delta AMB \equiv \Delta OMB$ (L.L.L.), de unde $\sphericalangle AMB = \sphericalangle OMB$, apoi $\sphericalangle AMN = \sphericalangle NMO$, ceea ce arată că $(MN$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMO$. □



Soluţia 4 (folosind rapoarte). MN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMC$ dacă şi numai dacă $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AM}{MC}$, $(*)$. Fie $CM \cap AB = \{P\}$. În ΔAPC cu transversala $B - M - N$ obţinem, cu teorema lui *Menelaus*, $\dfrac{BP}{AB} \cdot \dfrac{AN}{NC} \cdot \dfrac{CM}{MP} = 1$, de unde $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{MP}{MC} \cdot \dfrac{AB}{BP}$. Astfel, relaţia $(*)$ este echivalentă cu $\dfrac{AM}{MP} = \dfrac{AB}{BP}$, $(**)$.

Avem $\Delta AMP \sim \Delta CAP$ (U.U.), deci $\dfrac{AM}{MP} = \dfrac{AC}{AP}$, ceea ce arată că relaţia $(**)$ este echivalentă cu $\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{AB}{BP}$, adică cu $\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{AC}{CQ}$ (unde $PQ \parallel BC, Q \in AC$), deci cu $AP = CQ$. Această ultimă relaţie rezultă din următorul rezultat.



Lemă. *Fie ΔPAC isoscel cu $CP = AC$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle ACP) = 20°$. Dacă luăm $Q \in (AC)$ astfel încât $\mathrm{m}(\sphericalangle QPC) = 10°$, atunci $AP = CQ$.*

Demonstraţie. Construim triunghiul echilateral ABC, ca în figura alăturată. Atunci $PC = AC = BC$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle PCB) = \mathrm{m}(\sphericalangle ACB) - \mathrm{m}(\sphericalangle ACP) = 40°$, deci $\mathrm{m}(\sphericalangle PBC) = \dfrac{140°}{2} = 70°$ şi $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PBC - \sphericalangle ABC = 10°$. Astfel $\mathrm{m}(\sphericalangle PBA) = \mathrm{m}(\sphericalangle QPC) = 10°$, $\mathrm{m}(\sphericalangle PAB) = \mathrm{m}(\sphericalangle QCP) = 20°$ şi $AB = PC$, deci $\Delta ABP \equiv \Delta CPQ$ (U.L.U.), ceea ce implică $AP = CQ$.

Bibliografie

[1] Beniamin Bogoşel, Stan Fulger, Mircea Lascu, Marius Stănean, *Probleme de geometrie. Calculul măsurii unor unghiuri*, Editura Gil, 2016.
[2] Sorana Ionescu, *Construcţiile auxiliare în rezolvarea problemelor de geometrie plană*, Editura Paralela 45, 2015.
[3] Romanian Mathematical Competitions, RMC 2018.