PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ASUPRA PROBLEMEI M.2482 DIN REVISTA KVANT

Ion Pătraşcu[1)]

În această lecţie vom arăta cum, pornind de la o problemă, putem formula şi demonstra rezultate suplimentare, care să fie utile în rezolvarea altor probleme.

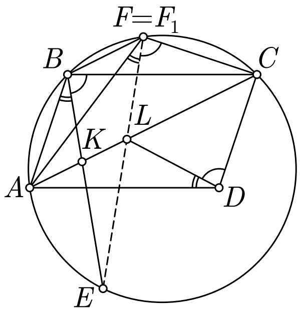
Problema în discuţie a fost propusă la Concursul Metropolises 2017, înainte de publicarea în Kvant. Prima soluţie de mai jos este cea avută în vedere de comisia concursului.

Fie $ABCD$ un paralelogram în care unghiul B este obtuz şi $AD > AB$. Punctele K şi L sunt luate pe diagonala AC astfel încât $\sphericalangle ABK = \sphericalangle ADL$ (punctele A, K, L, C sunt diferite şi K este între A şi D). Dreapta BK intersectează cercul circumscris ω al triunghiului ABC în punctele B şi E şi dreapta EL intersectează ω în punctele E şi F.

Arătaţi că $BF \parallel AC$.

Boyan Obuhov

Soluţia 1. Fie F_1 simetricul lui D faţă de AC. Observăm că F_1 se află pe ω deoarece $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ (proprietatea paralelogramului), $\sphericalangle ADC \equiv \equiv \sphericalangle AF_1C$ (datorită simetriei) şi atunci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AF_1C$, deci patrulaterul ABF_1C este înscris în ω.



Deoarece $ABCD$ este paralelogram avem $AB = CD$; de asemenea $CD = CF_1$, datorită simetriei. Atunci $AB = CF_1$ şi ABF_1C este un trapez isoscel cu $BF_1 \parallel AC$. Tot datorită simetriei, $\sphericalangle ADL = \sphericalangle AF_1L$ şi $\sphericalangle ADL \equiv \equiv \sphericalangle ABK$ din ipoteză. Unghiurile $\sphericalangle ABK$ şi $\sphericalangle AF_1E$ sunt congruente şi atunci interceptează acelaşi arc. Urmează că $\sphericalangle AF_1L \equiv \sphericalangle AF_1E$, deci punctele F_1, L, E sunt coliniare, prin urmare punctele F şi F_1 coincid. Dar, am arătat că $BF_1 \parallel AC$, în consecinţă $BF \parallel AC$. □

Soluţia 2. (*Mihai Miculiţa*) Redefinind punctul F ca fiind cel de-al doilea punct de intersecţie al cercului circumscris triunghiului ABC cu

[1)]Profesor, Colegiul Naţional „Fraţii Buzeşti", Craiova.

paralela dusă prin vârful B la dreapta AC, problema revine la a arăta că $\sphericalangle ADL \equiv \sphericalangle KBA$.

Deoarece $ABFC$ este patrulater inscriptibil şi $BF \parallel AC$, $ABFC$ este trapez isoscel, deci $CF = AB$, (1) şi $\sphericalangle FCL = \sphericalangle BAC$, (2). Pe de altă parte, $ABCD$ este paralelogram, deci $AB = CD$, (3), $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle LCD$, (4) şi $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$, (5). Din (1) şi (3) reiese $CF = CD$, iar din (2) şi (4) reiese $\sphericalangle FCL \equiv \sphericalangle LCD$. Astfel, triunghiurile FCL şi DCL sunt congruente (L.U.L.), deci $\sphericalangle LFC \equiv \sphericalangle LDC$, iar patrulaterul $FBEC$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle CFL = \sphericalangle CBK$.

Ţinând acum seama de ultimele relaţii, obţinem $\sphericalangle CBK = \sphericalangle LDC$, iar de aici rezultă

$$\sphericalangle KBA = \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBK = \sphericalangle ADC - \sphericalangle LDC = \sphericalangle ADL,$$

deci $\sphericalangle KBA \equiv \sphericalangle ADL$. □

Pornind de la această problemă formulăm următoarea afirmaţie.

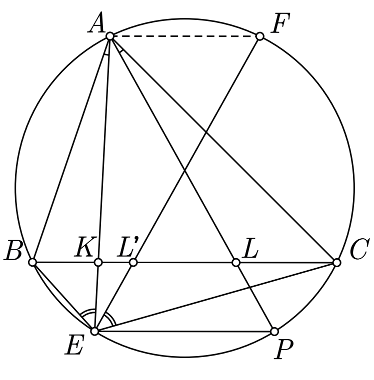
Lemă. *În triunghiul ABC considerăm cevienele izogonale AK şi AL (K, L sunt pe BC, $L \in (KC)$). Notăm cu L' izotomicul lui L pe BC (simetricul lui L faţă de mijlocul laturii BC) şi cu E intersecţia semidreptei AK cu cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci EK şi EL' sunt ceviene izogonale în triunghiul BEC.*

Demonstraţie. Fie P intersecţia semidreptei $(AL$ cu cercul circumscris triunghiului ABC. Avem $\widehat{BE} = \widehat{CP}$, (1), deci $EP \parallel BC$.

Patrulaterul $BCPE$ este trapez isoscel ($BE = CP$). Punctul L' fiind izotomicul lui L, avem $BL' = CL$.

Avem, de asemenea, $\Delta BL'E \equiv \Delta CLP$ (L.U.L), de unde

$$\sphericalangle BL'E = \sphericalangle CLP. \tag{2}$$



Notăm cu F intersecţia semidreptei $(EL'$ cu cercul. Relaţiile (1) şi (2) conduc la $\widehat{AB} = \widehat{CF}$, ceea ce arată că cevienele EK şi EL' sunt izogonale în triunghiul BEC; de asemenea se observă că $AF \parallel BC$. □

Soluţia 3. (*Ion Pătraşcu*) Relaţia $\sphericalangle ABK \equiv \sphericalangle ADL$ şi congruenţa triunghiurilor ABC şi CDA arată că punctul L este izotomicul piciorului izogonalei cevienei AK în triunghiul ABC. Aplicând Lema rezultă că $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle FEC$, cu consecinţa imediată $BF \parallel AC$.

Prezentăm în continuare două consecinţe ale lemei.

Consecinţa 1. (Figura A) În triunghiul ABC, AD este bisectoarea unghiului BAC, iar AL este antibisectoarea unghiului BAC (L este izotomicul lui D). Notăm cu E intersecţia bisectoarei AD cu cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci ED şi EL sunt ceviene izogonale în triunghiul BEC.

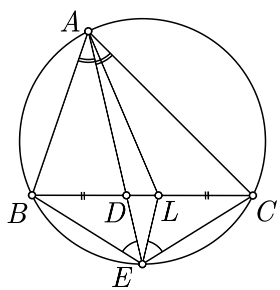


fig. A

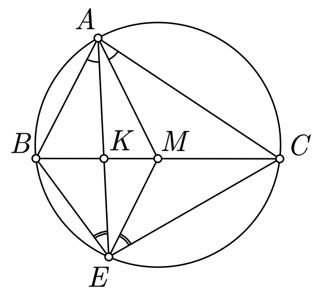


fig. B

Consecinţa 2. (Figura B) În triunghiul ABC, AK este simediană, $K \in (BC)$. Notăm cu E intersecţia semidreptei AK cu cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci EK este simediană în triunghiul BEC.

Observaţie. Patrulaterul $ABEC$ din enunţul Consecinţei 2 este patrulater armonic. Vezi [1].

Bibliografie

[1] I. Pătraşcu, F. Smarandache, *Some Properties of the Harmonic Quadrilateral*, Recreaţii Matematice, Anul XVI, Nr 2. – iulie-decembrie 2014, Iaşi.

[2] Revista KVANT nr.10/2017.